

Figurierte Zahlen



Kurzbeschreibung

Vor langer, langer Zeit hat man schon versucht, mit Hilfe von Steinen Zahlen darzustellen. Die Steine wurden zu unterschiedlichen Figuren zusammengelegt. Durch das systematische Erweitern dieser Figuren hat man wichtige Eigenschaften von Zahlen untersuchen und aufzeigen können. Auch heute noch ist es interessant, Zusammenhänge von geometrischen Figuren und Zahlen zu entdecken.

In der Forscherkiste werden folgende figurierten Zahlen behandelt:

- Dreieckzahlen (einfache Treppe),
- Quadratzahlen (Doppeltreppe, Quadrattreppe) und
- Rechteckzahlen (Rechtecktreppe)

Aber hier kann man der Kreativität freien Lauf lassen, man kann viele verschiedene Figuren für Zahlen finden und diese „mathematisch“ untersuchen.

Materialien

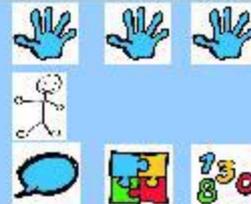
- Viele Holzwürfel (ohne Punktaufdruck)
- Steckbrett mit Perlen
- Papier

Arbeitsaufträge

Treppen bauen – Zahlenfolgen entdecken

Frage für Forscherinnen und Forscher:

Wie viele Stecker oder Würfel braucht man zum Bauen der Treppe?

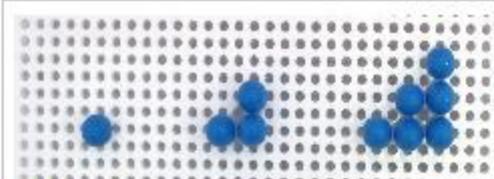


Auftrag:

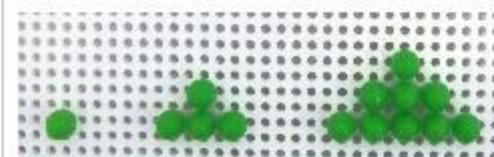
Wie wächst die Anzahl der Stecker/ Würfel?
Notiere deine Beobachtungen in den Forscherheft.

So könnt ihr vorgehen:

- Zuerst baut ihr die Figuren nach. Die Höhe der Figuren könnt ihr der Tabelle entnehmen.
- Dann zählt ihr die einzelnen Stecker/ Würfel der Figur und schreibt das Resultat in die Tabelle.



Einfache Treppe



Doppeltreppe

- Vergleicht eure Resultate in der Tabelle. Entdeckt ihr eine Regelmäßigkeit zwischen den Lösungen?
- Was fällt euch auf? Schreibt eure Beobachtungen auf das Blatt oder in euer Forscherheft.
- Wer Lust hat, eine knifflige Aufgabe zu lösen, kann ausrechnen, wie viele Würfel für einen Turm mit einer Höhe von 20 Stufen benötigt werden.

Forschertipp:

Ihr könnt schließlich noch eine eigenen Folge erfinden und untersuchen.



Quadrattreppe



Rechtecktreppe

Auftrag für den Forscherkreis:

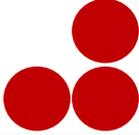
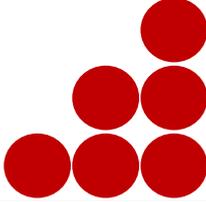
- Was und wie habt ihr gearbeitet?
- Was war einfach?
- Was war schwierig und warum?

Hintergrund

Figurierte Zahlen sind natürliche Zahlen, die man durch Figuren - zum Beispiel gelegt aus Steinen, Würfeln, Steckern - darstellen kann.

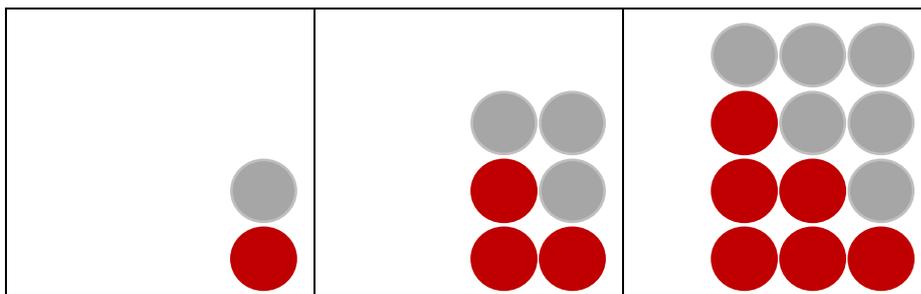
Eine figurierte Zahl steht nie für sich alleine, sie wird schrittweise systematisch erweitert, von Figur zu Figur kommt nach einem bestimmten Muster eine Anzahl an Steinen hinzu. Dadurch entsteht aus den Bildern eine Zahlenfolge. Alle Figuren einer bestimmten (Zahlen-)Folge sind durch ein gemeinsames Merkmal verbunden, das erkannt und auf weitere Folgeglieder übertragen werden muss. Oft gewinnt man Erkenntnisse zur Folge, wenn man die Differenz zwischen zwei benachbarten Folgegliedern betrachtet. Eine weitere Frage, die es zu beantworten gilt, ist: Kann man vorhersagen, wie viele Steine man zum Bauen der n -ten Figur braucht?

Einfache Treppe – Dreieckszahlen

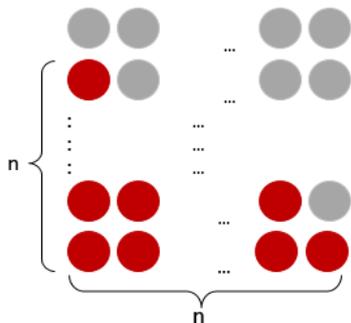
		
1	$1+2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$

Die Anzahlen der verwendeten Steine pro Figur heißen Dreieckszahlen: 1, 3, 6, ...
Man erhält sie, indem man aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert.

Um herauszufinden, wie viele Steine man für die n -te Dreieckszahl braucht, ist folgende Abbildung hilfreich: Jede Figur wird verdoppelt.



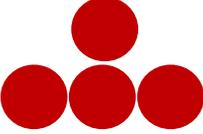
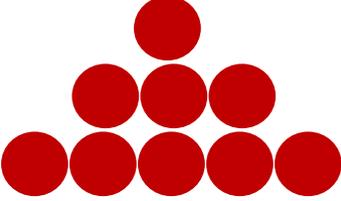
Betrachtet man die n -te Figur, so lässt sich eine einfache geometrische Figur erkennen:



Ein Rechteck mit Seitenlänge n und Seitenlänge $n+1$. Der Flächeninhalt für dieses Rechteck lässt sich durch $n \cdot (n+1)$ ermitteln. Die n -te Dreieckszahl ist aber genau die Hälfte davon, daher gilt:

Für die n -te Dreieckszahl braucht man genau $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ Steine.

Doppeltreppe – Quadratzahlen

		
1	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 + 5 = 9$

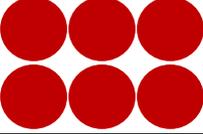
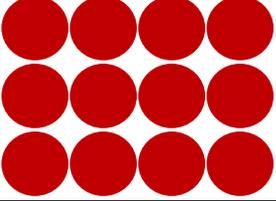
Die Anzahlen der verwendeten Steine pro Figur heißen Quadratzahlen: 1, 4, 9, ...

Man erhält sie, indem man aufeinanderfolgende ungerade Zahlen addiert.

Durch Umlegen der Steine erkennt man recht rasch, dass sie sich in Form eines Quadrats anordnen lassen, wodurch sich der Name Quadratzahlen erklären lässt.

Für die n -te Quadratzahl braucht man genau n^2 Steine.

Rechtecktreppe

		
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 4 = 12$

Rechteckzahlen sind das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

Will man die Anzahl der Steine für die n -te Rechteckzahl bestimmen, so muss man $n \cdot (n+1)$ bestimmen.

Hinweise zur Umsetzung aufgrund der Erprobung – Dokumente aus der Erprobung

Bei der Arbeit mit Forscherkisten im Allgemeinen, auch speziell auf die Forscherkiste „Treppen bauen – Figurierte Zahlen“ bezogen, ist es wichtig, dass die Lernumgebung sehr sorgfältig und anschaulich eingeführt wird, damit gewährleistet ist, dass die Kinder möglichst selbst-ständig arbeiten (können). Es wäre natürlich gut, wenn das Material den Kindern bereits bekannt ist, es stellt dann nämlich keine

zusätzliche Hürde mehr dar. Vielmehr arbeiten die Schüler*innen mit etwas Vertrautem, was Beobachtungen und Entdeckungen vereinfacht.

Die Kinder sollten auf der einen Seite nicht das Gefühl haben, dass sie mit dem (neuen) Material allein gelassen werden. Auf der anderen Seite geht es darum, dass die Kinder weitgehend selbstständig mit dem Material arbeiten. Damit können sie unvoreingenommen eigene Entdeckungen machen, ohne dass gewisse Lösungswege vorgezeigt oder vorgegeben werden. Daher sollte es im Vorfeld also keine Besprechung oder Erklärung des Materials stattfinden. Nachdem sich das Kind bzw. die Kinder die Forscherkiste geholt hat/haben und einen geeigneten Platz zum Arbeiten eingenommen hat/haben, sollen sie die Regelmäßigkeiten zwischen der Höhe und der Anzahl benötigter Würfel suchen und diese Entdeckungen, in Worte gefasst, auf dem Arbeitsblatt beschreiben.

Um den Kindern ein Arbeiten zu gewährleisten, das unnötige Unterbrechungen und Verwirrungen vermeidet, sollten die Rahmenbedingungen für die Kinder klar sein. Es sollte den Kindern eine entspannte Arbeitsatmosphäre angeboten werden. Je öfter die Kinder bereits mit Forscherkisten bzw. entdeckend gearbeitet haben, desto besser können sie sich auf die Situation einstellen.

Theoretisch sollten sich die Schüler*innen in Einzelarbeit dem Thema widmen, jedoch sollte man bedenken, dass jedes Kind anders ist, und dass sich manche Kinder mit einem Problem lieber im Team beschäftigen. Vor allem wird dadurch der Kompetenzbereich Kommunizieren angesprochen und der Zusammenhalt innerhalb der Klassenmitglieder wird verbessert.

Ein weiterer wesentlicher Faktor ist die Zeit. Es ist wichtig, dass die Kinder nicht unter Druck gesetzt werden, in Kürze etwas zu entdecken oder entdecken zu müssen. Beobachtungen und Entdeckungen brauchen seine Zeit, bei manchen Kindern mehr, bei anderen weniger. Zuerst müssen sich die Kinder in Ruhe mit dem Thema auseinander setzen können, um soweit in die Thematik einzutauchen, um eigene Ansätze und Überlegungen anzustellen, diese zu bestätigen oder auch zu widerlegen. Es muss den Schüler*innen der Freiraum gegeben werden, um Umwege machen zu können, Umwege die sie im Weiteren zur richtigen Lösung, zu weiteren Entdeckungen führen. Die Schüler*innen sollten sich also vorerst mit den Holzwürfeln und Steckperlen vertraut machen dürfen, auch wenn sie sich nicht umgehend an die Fragenbeantwortung machen. Wenn diese Spanne zu lange anhält, können die Kinder auch durch gezielte Fragen zurück zum Arbeitsprozess gebracht werden.

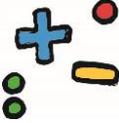
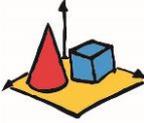
Erklärung der Symbole

Als Orientierungshilfe wird auf den Arbeitsaufträgen mit Symbolen gearbeitet, ihre Bedeutung wird hier kurz vorgestellt:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

	Modellieren		Problemlösen
	Operieren		Kommunizieren

Inhaltliche mathematische Kompetenzen

	Arbeiten mit Zahlen		Arbeiten mit Größen
	Arbeiten mit Operationen		Arbeiten mit Ebene und Raum

Weitere Hinweise

	Empfehlung zur Gruppengröße (Anzahl der Kinder)
	Schwierigkeitsgrad