schöne Muster

Mathematische Lernumgebungen für die Primarstufe

Pädagogische Hochschule Wien

Impressum

Herausgeber*innenteam:

Varelija Gordan, Varelija-Gerber Andrea, Musilek Monika

Pädagogische Hochschule Wien
Grenzackerstraße 18, 1100 Wien
phwien.ac.at

Konzept und Idee:
Varelija Gordan

Autor*innenteam:
Hacker Patrick, Ilias Petra, Musilek Monika, Peer Tamara,
Sagmeister Gerald, Varelija Gordan, Varelija-Gerber Andrea

Lektorat:
Haderer-Schneemann Georg

Layout:
Ilias Petra

Vervielfältigungen sind nur mit Zustimmung der
Pädagogischen Hochschule Wien zulässig.

Vervielfältigungen für schulische Zwecke sind ausdrücklich erwünscht.

Wien, 06. 2021

Mathematische Lernumgebungen

Verstehen Lehren in Bezug auf mathematische Bildung erscheint im fachdidaktischen Diskurs der Primarstufenmathematik einer der zentralen Aspekte von zeitgemäßem Unterricht. Es gilt nach Möglichkeiten substanzieller Aufgabenstellungen und Grenzen im Unterricht zu suchen, um sich somit dem verstehenden Lehren zu nähern. Mathematischer Bildung in der Primarstufe auf die Spur zu kommen bedeutet, nach den Bedingungen der Möglichkeit zum Verstehen mathematischer Inhalte zu fragen. Mathematische Lernumgebungen scheinen jenen Bildungsgehalt, jene mathematische Substanz aufzuweisen, welche Einsicht in ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte, Muster und Strukturen ermöglicht. Es gilt den Schüler*innen u.a. arithmetische und geometrische Lernumgebungen anzubieten, unter dem Differenzierungsaspekt, dass sie für rechenschwache bis begabte Schüler*innen zugänglich sein sollen.
Durch die Arbeit mit mathematischen Lernumgebungen versuchen wir näherungsweise eine Klarheit zu strukturieren, wie man systematisch-mathematischer Bildung in der Primarstufe auf die Spur kommen kann. Ausgehend von der Hintergrundfolie Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen zu betrachten, sind folgende Begriffe zum Entdeckenden Lernen mit substanziellen Aufgabenstellungen aus theoretischer Sicht grundlegend:

Substanzielle Aufgaben … sind Aufgaben, bei denen sich Kinder grundlegende mathematische Muster und Strukturen erarbeiten können. Die Kinder können differenziert, entsprechend ihres Leistungsniveaus innermathematische und außermathematische Problemstellungen zu lösen versuchen. (Vgl. Selter, Modul G7-Interessen aufgreifen und weiterentwickeln. IPN 2007)

Lernumgebung … folgt einer größeren mathematischen Fragestellung, bietet allen Kindern, von rechenschwachen bis hochbegabten, unterschiedliche Bearbeitungsmöglichkeiten an.
(Vgl. Hirt, Wälti, Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett/Kallmeyer 2008)

Natürliche Differenzierung … Die Tiefe der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung geht von der Natur des Kindes aus, d.h. alle Kinder können an einer großen mathematischen Fragestellung arbeiten und das Kind bestimmt vom eigenen Interessensgrad her, wie weit es im mathematischen Inhalt vorzudringen versucht. (Vgl. Wittmann, Das Zahlenbuch 1. Klett 2006)

Eigenproduktionen … dazu zählen Erfindungen, eigene Rechenwege, Forscher*innenaufgaben und der Rückblick der Kinder. Für die Lehrkraft eine Möglichkeit, die Denkwege der Kinder zu erfassen. (Vgl. Sundermann, Selter, Mit Eigenproduktionen individualisieren. In: Christiani, Reinhold (Hrsg.): Jahrgangsübergreifend unterrichten. Cornelsen 2005)

Fachdidaktiker*innen der Pädagogischen Hochschule Wien versuchen mit den mathematischen Lernumgebungen eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie Pädagog*innen mathematische Bildung im Unterricht der Primarstufe anregen können. 14 arithmetische und 14 geometrische Lernumgebungen sind in diesem Werk für die Grundstufe I und II konzipiert.
Die hier vorgestellten Aufgaben sollen den Schüler*innen Anlass zum Mathematiktreiben sein:
Sie ermöglichen den Kindern, mathematische Zusammenhänge zu erkennen, regen umfangreiche Denk- und Lernprozesse an und haben motivierenden Charakter. Schüler*innen können entsprechend eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts mit den Aufgabenstellungen in diesen Lernumgebungen:

- Vermutungen über mathematische Zusammenhänge aussprechen,
- Muster und Strukturen in arithmetischen und geometrischen Aufgabenstellungen suchen,
- auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene ihre Lösungsideen erproben,
- sich gegenseitig über Denk- und Lösungswege austauschen,
- Problemlösekompetenzen entwickeln,
- in mathematischen Konferenzen nach vorteilhaften Strategien suchen,
- Begründungen über mathematische Zusammenhänge verbalisieren,
- Lernen, entdeckte Muster und Strukturen zu notieren, um den Entdeckungsprozess nachvollziehbar zu gestalten,
- nachhaltig mathematische Zusammenhänge im Lernprozess verankern und
- mathematische Inhalte in ersten Schritten verstehen.

Mathematische Muster und Strukturen, die es zu entdecken gilt, sind ergänzend als Lösungsseiten ausgearbeitet.

Die Fachdidaktiker*innen der PH Wien wünschen in der Arbeit mit den mathematischen Lernumgebungen viel Freude und Erfolg!

Der Mathematik wird oft zu Unrecht attestiert, dass sie eine rein formal-deduktive Wissenschaft mit einer besonders strengen und exakten Sprech- und Denkweise ist. Dabei steckt im Betreiben von Mathematik viel Kreativität. Diese kreativen Anteile gilt es im Mathematikunterricht kontinuierlich einzubinden. Die Suche nach Mustern und Strukturen bietet hierfür besonders schöne Möglichkeiten und fördert zudem den Erfindungsreichtum und die Entdeckerfreude aller Schüler*innen.

Die von Fachdidakter*innen der Pädagogischen Hochschule Wien geschaffenen mathematischen Lernumgebungen zu schönen Mustern ermöglichen Primarstufenschüler*innen echte mathematische Tätigkeiten mit großer Freude auszuführen und machen fundamentale Ideen der Mathematik schon früh erlebbar.

HS-Prof. Mag.a Dr.in Evelyn SÜSS-STEPANCIK
Vizerektorin für Lehre, Forschung und Internationales

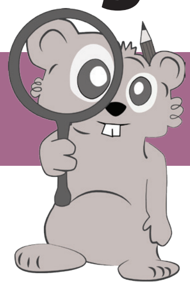
Schöne Muster – mathematische Lernumgebungen für die Primarstufe ist eine Handreichung für den Mathematikunterricht in der Volksschule, die die Kinder mit vielfältigen praxisnahen und schüler*innenzentrierten Aufgabenstellungen zum lösungsorientierten Nachdenken und Experimentieren mit mathematischen Inhalten anregt und so zum selbstentdeckenden Lernen im Zusammenhang mit Geometrie und Arithmetik in Grundstufe 1 und 2 auffordert. Studierende und Lehrende können von der abwechslungsreichen Zusammenstellung mathematischer Lernumgebungen profitieren und daraus wertvolle Impulse für die eigene Unterrichtspraxis erhalten.

Im Namen der Kinder, die auf diese Weise selbstentdeckend und forschend mit komplexen mathematischen Inhalten vertraut gemacht werden, danke ich allen Fachdidaktiker*innen, die an dieser pädagogisch wertvollen schüler*innenzentrierten Handreichung mitgearbeitet haben!

Dipl. Oec. Dr. Christian RUDLOFF, BEd MA MBA
Institutsleiter, Institut für Elementar- und Primarbildung

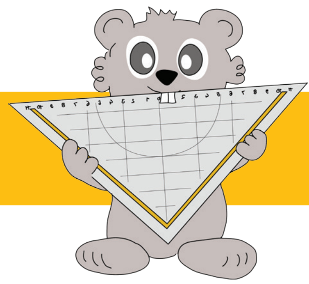
Verzeichnis der Lernumgebungen

Arithmetik - Grundstufe 1



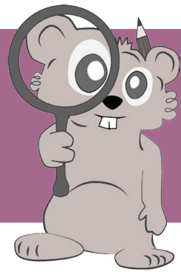
Arithmetik - Grundstufe 2

Geometrie - Grundstufe 1



Geometrie - Grundstufe 2

A1 Leichte und schwere Aufgaben im Zahlenraum 100



Bei dieser Aufgabe geht es darum, dass du erkennst, welche Additionen dir leichtfallen, und welche noch schwierig für dich sind.

Teile dafür eine Seite in deinem Heft in zwei Spalten. Nimm dir aus dem Kasten unten Zahlen deiner Wahl und mache Additionen daraus. In die linke Spalte schreibst du Additionen, die dir leichtfallen. In die rechte Spalte schreibst du Additionen, bei denen du noch Schwierigkeiten hast.

 leicht	 schwer

Das sind deine Zahlen:

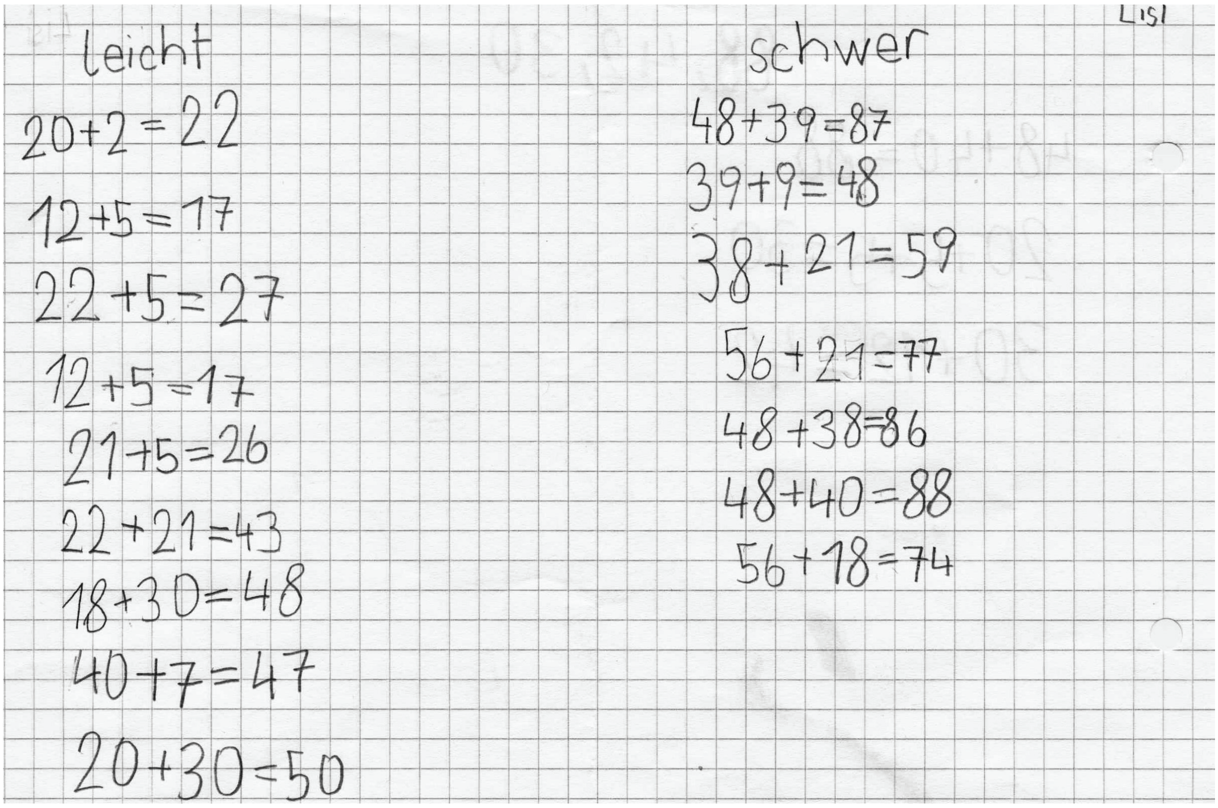
8 12 40 13 20 45

56 5 22 + 38 21

2 39 7 30 48 9

A1 Leichte und schwere Aufgaben im Zahlenraum 100

Lisi kann sich definitiv im ZR 100 orientieren und Rechenverfahren durchführen. Auch Rechnungen mit gemischten Zehnern mit Überschreitung bereiten ihr keine Probleme. Doch sie weiß, dass es hier besondere Schwierigkeiten/Herausforderungen gibt, die man beim Rechnen beachten muss.



Lisi

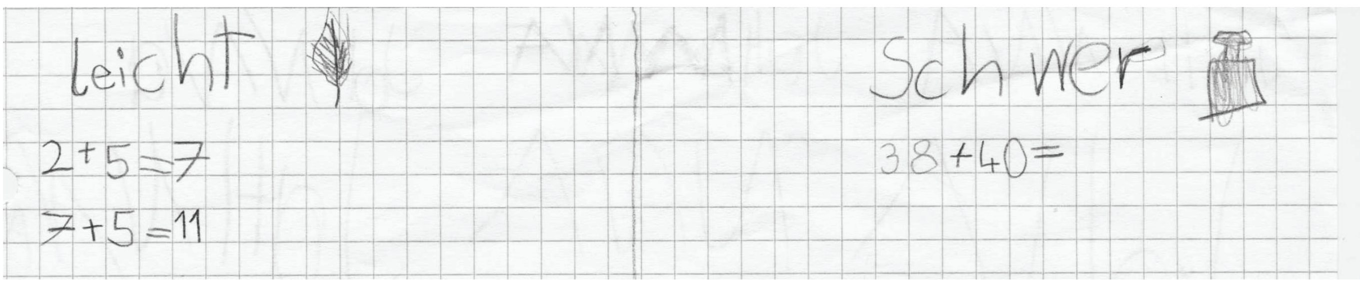
leicht

20+2=22
12+5=17
22+5=27
12+5=17
21+5=26
22+21=43
18+30=48
40+7=47
20+30=50

schwer

48+39=87
39+9=48
38+21=59
56+21=77
48+38=86
48+40=88
56+18=74

Johanna bewegt sich bei den leichten Aufgaben im ZR 20. Darüber hinaus wird es offensichtlich schwierig; die einzige in der rechten Spalte angeführte Addition kann sie nicht lösen.



leicht

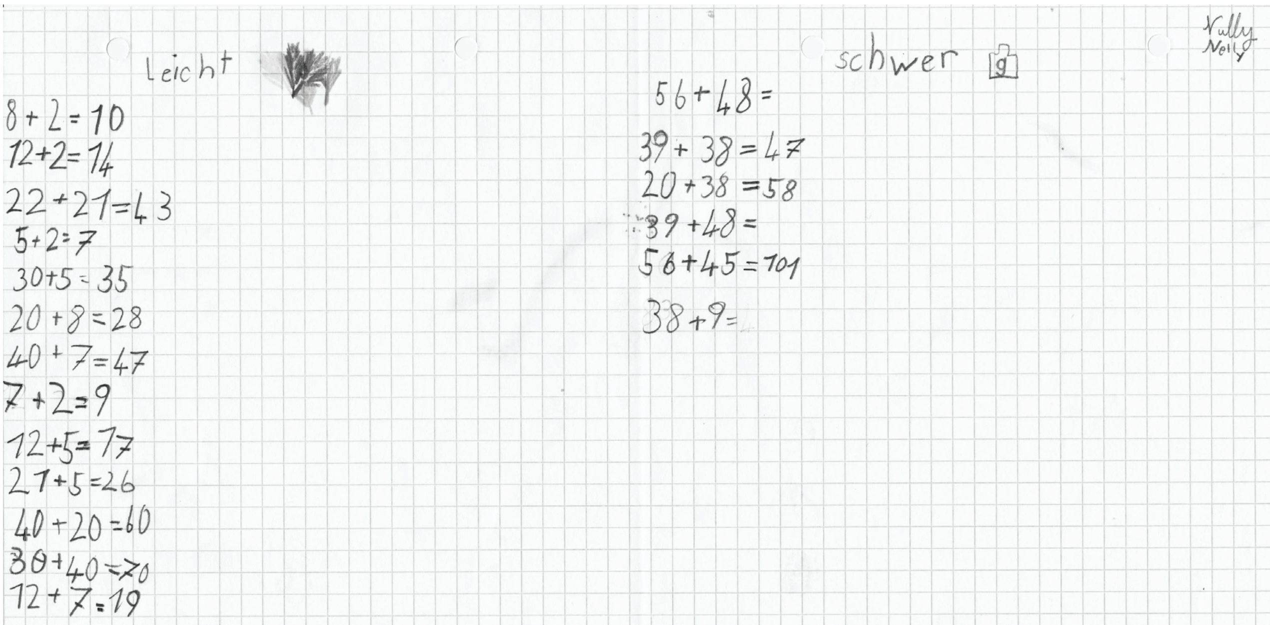
2+5=7
7+5=11

schwer

38+40=

A1 Leichte und schwere Aufgaben im Zahlenraum 100

Nelly kann ebenfalls unterscheiden zwischen Aufgaben, die ihr leichtfallen, die sie schon kann, und Aufgaben, die ihr schwerfallen. Einige der schwierigen Aufgaben versucht sie auch zu lösen, was nicht immer gelingt.

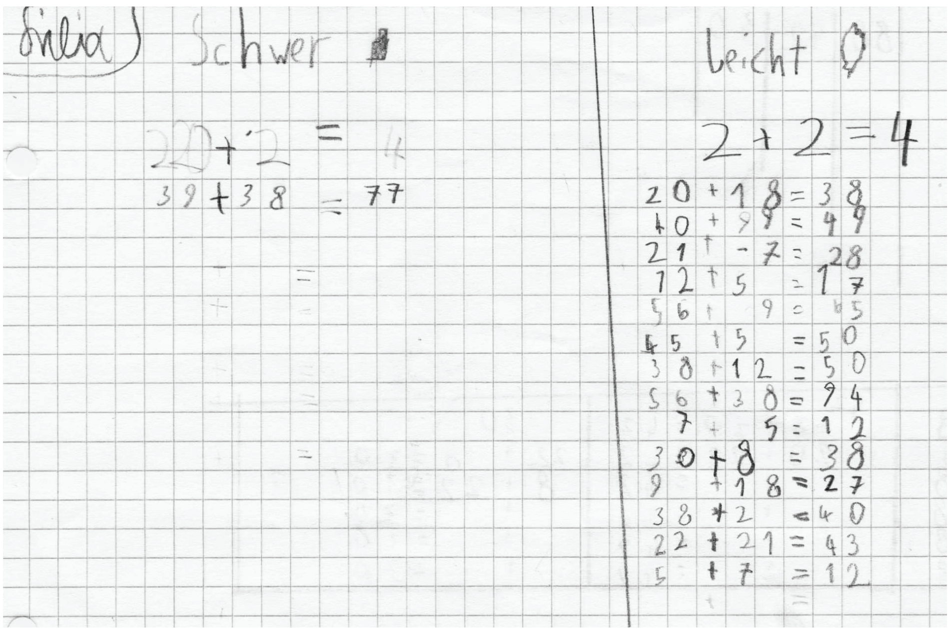


Leicht
8+2=10
12+2=14
22+21=43
5+2=7
30+5=35
20+8=28
40+7=47
7+2=9
12+5=17
21+5=26
40+20=60
30+40=70
12+7=19

schwer
56+48=
39+38=47
20+38=58
39+48=
56+45=101
38+9=

Nelly

Lilia zeigt hier nicht ihr ganzes Können, sondern verliert sich ein wenig in den leichten Aufgaben.
Bei der anschließenden Rechenkonferenz wird deutlich, dass sie problemlos mit Additionen von gemischten Zehnern im ZR 100 mit Überschreitung umgehen kann. Dabei wendet sie ihre eigene Strategie an, die sie auch erklären kann.

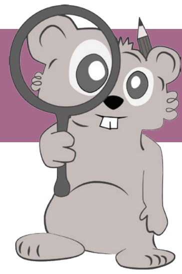


Lilia

Schwer
39+38=77

leicht
2+2=4
20+18=38
40+9=49
21-7=28
12+5=17
56+9=65
45+5=50
38+12=50
56+38=94
7+5=12
30+8=38
9+18=27
38+2=40
22+21=43
5+7=12

Schöne Muster



1 + 3 =	2 + 4 =	1 + 2 =
3 + 5 =	4 + 6 =	2 + 3 =
5 + 7 =	6 + 8 =	3 + 4 =
7 + 9 =	8 + 10 =	4 + 5 =
…	…	…

Setze fort!

Was fällt dir an den Ergebnissen auf?

Warum ist das so?

A2 Schöne Muster

1 + 3 = 4	2 + 4 = 6	1 + 2 = 3
3 + 5 = 8	4 + 6 = 10	2 + 3 = 5
5 + 7 = 12	6 + 8 = 14	3 + 4 = 7
7 + 9 = 16	8 + 10 = 18	4 + 5 = 9
9 + 11 = 20	10 + 12 = 22	5 + 6 = 11

Bildungsgesetz für alle drei Rechenpäckchen:
Der zweite Summand wird in der folgenden Zeile zum ersten Summanden. Der neue zweite Summand ist jeweils um zwei größer als der erste Summand.

Schönes Muster beim ersten Rechenpäckchen

Die Ergebnisse sind alle gerade.
Es werden stets zwei ungerade Zahlen addiert, daher ist die Summe gerade.
Alle Ergebnisse sind durch 4 teilbar.
Von Zeile zu Zeile wächst das Ergebnis um 4.

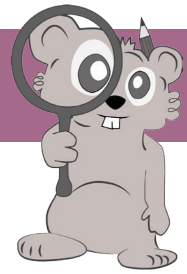
Schönes Muster beim zweiten Rechenpäckchen

Die Ergebnisse sind alle gerade.
Es werden stets zwei gerade Zahlen addiert, daher ist die Summe gerade.
Alle Ergebnisse sind durch 2 teilbar.
Von Zeile zu Zeile wächst das Ergebnis um 4.

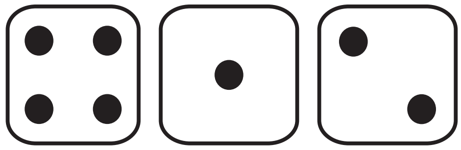
Schönes Muster beim dritten Rechenpäckchen

Die Ergebnisse sind alle ungerade.
Es werden stets eine gerade und eine ungerade Zahlen addiert, daher ist die Summe ungerade.
Von Zeile zu Zeile wächst das Ergebnis um 2.

A3 Drei Würfel



Du brauchst: drei Spielwürfel



1. Würfle mit allen drei Würfeln.
2. Zähle die Augenzahlen zusammen.
   Schreibe deine Rechnung auf.
3. Findest du noch andere Zerlegungen
   mit demselben Ergebnis?

7 = 4 + 1 + 2

7 = 5 + 1 + 1

7 = 3 + 2 + 2

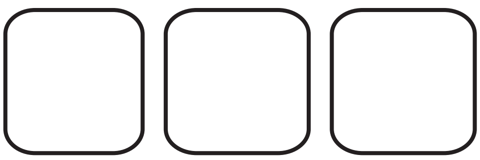
7 = __ + __ + __

Aufgabe 1:

Würfle mit den drei Würfeln.
Zähle die Augenzahlen zusammen.
Schreibe deine Rechnung auf.
Finde weitere Zerlegungen mit demselben Ergebnis.

Aufgabe 2:

Das Ergebnis ist 13. Finde die gewürfelten Zahlen. Gibt es mehrere Lösungen?



13 = __ + __ + __

Aufgabe 3:

Erstellt in der Klasse eine Übersicht mit allen möglichen Ergebnissen und den dazupassenden Zerlegungen.

A3 Drei Würfel

Augensumme	Zerlegungen					
3	1 + 1 + 1					
4	1 + 1 + 2					
5	1 + 1 + 3	1 + 2 + 2				
6	1 + 1 + 4	1 + 2 + 3	1 + 2 + 2			
7	1 + 1 + 5	1 + 2 + 4	1 + 3 + 3	2 + 2 + 3		
8	1 + 1 + 6	1 + 2 + 5	1 + 3 + 4	2 + 2 + 4	3 + 3 + 2	
9	1 + 2 + 6	1 + 3 + 5	1 + 4 + 4	2 + 2 + 5	2 + 3 + 4	3 + 3 + 3
10	1 + 3 + 6	1 + 4 + 5	2 + 2 + 6	2 + 3 + 5	2 + 4 + 4	3 + 3 + 4
11	1 + 4 + 6	1 + 5 + 5	2 + 3 + 6	2 + 4 + 5	3 + 3 + 5	3 + 4 + 4
12	1 + 5 + 6	2 + 4 + 6	2 + 5 + 5	3 + 3 + 6	3 + 4 + 5	4 + 4 + 4
13	1 + 6 + 6	2 + 5 + 6	3 + 4 + 6	3 + 5 + 5	4 + 4 + 5	
14	2 + 6 + 6	3 + 5 + 6	4 + 4 + 6	4 + 5 + 5		
15	3 + 6 + 6	4 + 5 + 6	5 + 5 + 5			
16	4 + 6 + 6	5 + 5 + 6				
17	5 + 6 + 6					
18	6 + 6 + 6					

In der Tabelle sind alle möglichen Zerlegungen angeführt.
Um Doppelnennungen zu vermeiden, wurden die Zahlen der Größe nach geordnet.

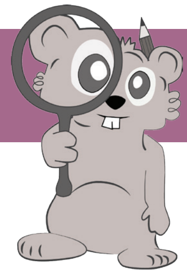
Lösungen:

Aufgabe 2: Diese fünf Zerlegungen sind möglich:

1 + 6 + 6   2 + 5 + 6   3 + 4 + 6   3 + 5 + 5   4 + 4 + 5

Aufgabe 3: siehe Tabelle

A4 Welche Zahlenkarten...?



Du brauchst: Zahlenkarten von 1 bis 9

1. Nimm eine Zahlenkarte.
   Wie viele Minusrechnungen findest du, die deine Zahlenkarte als Ergebnis haben? Verwende nur Zahlen von 1 bis 9. Schreibe deine Rechnungen auf.

9 – 4

8 – 3

7 – 2

6 – 1

2. Lege deine Karte zur Seite und nimm eine neue.
   Bilde wieder so viele Minusrechnungen wie du kannst. Danach legst du diese Karte zur Seite und wiederholst die Übung so oft, bis du keine Zahlenkarte mehr hast.

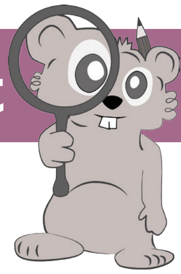
3. Was fällt dir auf?

A4 Welche Zahlenkarten...?

Differenz		Lösungsmöglichkeiten						
1	2 – 1	3 – 2	4 – 3	5 – 4	6 – 5	7 – 6	8 – 7	9 – 8
2		3 – 1	4 – 2	5 – 3	6 – 4	7 – 5	8 – 6	9 – 7
3			4 – 1	5 – 2	6 – 3	7 – 4	8 – 5	9 – 6
4				5 – 1	6 – 2	7 – 3	8 – 4	9 – 5
5					6 – 1	7 – 2	8 – 3	9 – 4
6						7 – 1	8 – 2	9 – 3
7							8 – 1	9 – 2
8								9 – 1
9								

Entdeckungsmöglichkeiten:
Je kleiner die Zahl auf der Karte, desto mehr Minusrechnungen gibt es.
Für 9 gibt es mit den Zahlenkarten von 1 bis 9 keine Lösung.

A5 Finde heraus, was drinnen steckt



Du brauchst:
Zehn Zahlenkarten mit den Zahlen von 0 bis 9
Fünf Kuverts

Jemand hat zehn Zahlenkarten in fünf verschiedene Kuverts gesteckt, in jedes genau zwei. Die Summe der beiden Zahlen steht auf dem Kuvert:

Welche Zahlenkarten sind in welchem Umschlag?

Beschreibe, wie du herausfindest, was in den einzelnen Kuverts steckt!

Findest du weitere Lösungen?

Wie kannst du dir sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben?

Erstelle ein eigenes Rätsel:
Stecke in jedes Kuvert genau zwei Zahlenkarten.
Schreibe die Summe der beiden Zahlen auf das Kuvert.

Ist deine Lösung eindeutig oder gibt es eine andere Möglichkeit die Zahlen auf die Kuverts zu verteilen?

A5 Finde heraus, was drinnen steckt

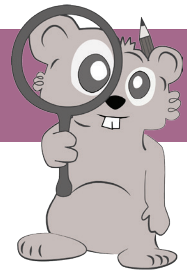
Im ersten Schritt werden die Zahlen, die auf den Kuverts stehen, in alle möglichen zwei Summanden zerlegt:

7	8	13	14	3
0 + 7	0 + 8	9 + 4	9 + 5	0 + 3
1 + 6	1 + 7	8 + 5	8 + 6	1 + 2
2 + 5	2 + 6	7 + 6		
3 + 4	3 + 5			

Da das Kuvert „3“ nur zwei mögliche Zerlegungen hat, kann man versuchen, von rechts nach links zu arbeiten; dadurch werden vier Zahlenkarten gebraucht, die für nachfolgende Zerlegungen nicht mehr zur Verfügung stehen.
Es gibt drei mögliche Lösungen:

7	8	13	14	3
2 + 5	1 + 7	9 + 4	8 + 6	0 + 3
3 + 4	8 + 0	7 + 6	9 + 5	1 + 2
0 + 7	3 + 5	9 + 4	8 + 6	1 + 2

A6 Malreihen



Du brauchst: deine Hundertertafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Schreib auf, in welchen Malreihen alle Ergebniszahlen gerade Zahlen sind.
Du kannst zur Unterstützung eine Hundertertafel zur Hand nehmen.

Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu finden, wann alle Ergebniszahlen einer Malreihe gerade Zahlen sind.

Untersuche die Malreihe von 6. Was passiert, wenn du alle Ergebniszahlen halbierst?
Versuche aufzuschreiben, was du herausgefunden hast.

Finde eigene Beispiele zum Verdoppeln und Halbieren von Malreihen.

A6 Malreihen

Die Malreihen, deren Ergebniszahlen ausnahmslos gerade Zahlen sind, sind die von 2, 4, 6, 8, 10. Bevor man die Aktivität durchführt, bietet es sich an, zu wiederholen, was gerade und ungerade Zahlen sind.

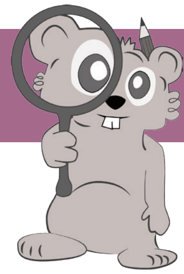
Den Kindern könnte auffallen, dass alle Malreihen von geraden Zahlen gerade Ergebniszahlen liefern. Die Malreihen von ungeraden Zahlen liefern hingegen abwechselnd ungerade und gerade Ergebniszahlen.

Eine mögliche Antwort wäre:
Eine Malreihe hat genau dann ausschließlich gerade Ergebniszahlen, wenn sie die Malreihe einer geraden Zahl ist.

Wenn man die Ergebniszahlen der Malreihe von 6 halbiert, erhält man die Ergebniszahlen der Malreihe von 3.

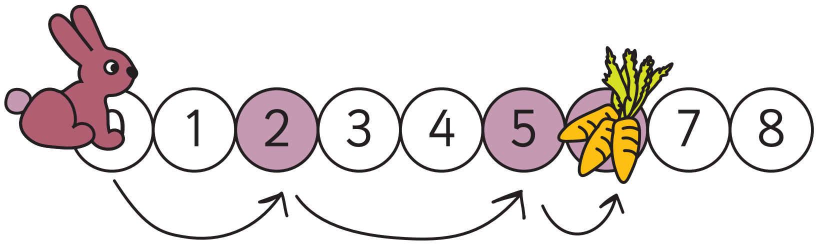
Mögliche Beispiele wären: Das Halbieren der Ergebniszahlen der Malreihe von 10 liefert die Malreihe von 5. Aber es könnte auch eine Idee kommen wie:
Das Verdoppeln der Ergebniszahlen der Malreihe von 6 liefert die Malreihe von 12. Hier kann man die Kinder ruhig länger überlegen lassen, oder sie ermuntern, über 10 hinauszugehen.

A7 Zahlenhüpfen

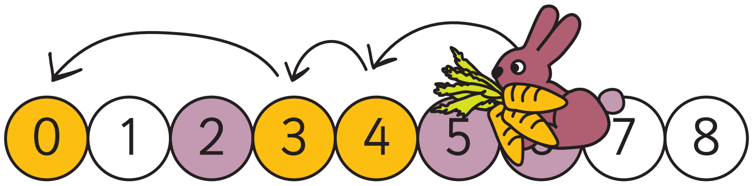


Du brauchst: Kopiervorlage mit Feldern zum Hüpfen, Plättchen

Das Kaninchen kann bis zu drei Felder auf einmal weit hüpfen.
Es springt zu den Karotten.



Nun hüpft das Kaninchen wieder nach Hause. Es darf aber nicht mehr auf die selben Felder hüpfen. So hüpft es zurück:



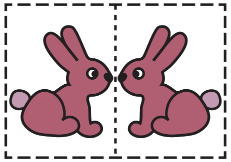
Wir schreiben auf, wie das Kaninchen gehüpft ist:
Zu den Karotten: 0 + 2 + 3 + 1 = 6 oder 2 + 3 + 1 = 6
Wieder nach Hause: 6 - 2 - 1 - 3 = 0

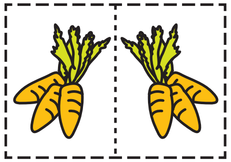
Jetzt bist du dran!

- Lege die Karotten auf ein anderes Feld. Lass das Kaninchen sie holen und wieder zurück nach Hause bringen. Denk daran, dass es nicht zweimal auf das selbe Feld hüpfen darf. Schreibe die Rechnungen auf, wie es gehüpft ist.
- Spiele auch mit anderen Tieren:
  Die Katze kann bis zu 4 Felder weit hüpfen, das Känguruh sogar bis zu 10.

  Lege das Futter auf den Zahlenstreifen. Du kannst dir aussuchen, wie weit es vom Zuhause weg liegt.

  Schreibe auf, wie sie hin und wieder zurück hüpfen. Aber denke daran, dass sie nie zweimal auf ein Feld hüpfen.





Schneide die beiden Rechtecke mit dem Kaninchen und den Karotten aus,
falte sie in der Mitte.
Du kannst auch eigene Tiere und Futter in die leeren Rechtecke malen.

Schneide den Zahlenstreifen entlang der gestrichelten Linien aus.
Wenn du mit einem besonders langen Zahlenstreifen arbeiten möchtest,
schneide den zweiten Streifen auch aus und klebe ihn ans Ende des ersten.
Auf jene Felder, auf die das Kaninchen schon einmal gehüpft ist, kannst du
Wendeplättchen legen.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

A7 Zahlenhüpfen

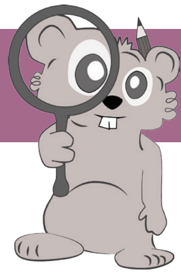
Die Kinder können selbst wählen, wie weit die Karotten vom Kaninchen entfernt liegen und wie viele Hüpfer es macht, um bis zu ihnen zu kommen.
Es gibt dabei zwei Regeln: Kein Feld darf zweimal betreten werden und das Kaninchen kann höchstens drei Felder weit springen. Die Katze kann höchstens vier Felder weit springen, das Känguruh höchstens 10 Felder.
Es gibt immer mehrere Lösungen.

Die Kinder können entdecken, dass „wieder zurück nach Hause kommen“ bedeutet, dass beim Rechnen 0 erreicht wird. Außerdem muss die Summe der „Hüpfweiten“ der Zahl entsprechen, auf der das Futter liegt.

Erweiterungsmöglichkeiten:

- In Partnerarbeit schreibt ein Kind die Hüpfanweisung für ein Tier als Rechnung auf, das andere Kind muss richtig hüpfen.
- Das Futter bleibt auf einem festen Platz und es werden mit einem Tier möglichst viele unterschiedliche Arten gesucht, um es zu erreichen.
- Beim Weg zum Futter und wieder zurück müssen alle Felder einmal betreten werden - auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten.
- Tierrätsel: Es wird nicht gesagt, welches Tier hüpft. Man weiß aber, wo das Futter liegt und wie viele Hüpfer das Tier braucht, um es zu erreichen.
  Welches Tier kann es gewesen sein?
  Zum Beispiel: Das Futter liegt auf Feld 15 und das Tier braucht 4 Hüpfer.
  Lösung: Es kann die Katze sein (z.B. 4 + 4 + 4 + 3 = 15) oder das Känguruh (z.B. 10 + 5 = 15) aber nicht das Kaninchen (3 + 3 + 3 + 3 = 12 - es wären mehr als vier Sprünge nötig).

A8 Stellenwerttafel



Du brauchst: Stellenwerttafel, Plättchen

ZT	T	H	Z	E

1. Nimm zwei Plättchen. Lege damit alle möglichen 5-stelligen Zahlen in der Stellenwerttafel.
2. Schreibe die Zahlen auf. Sprich dazu!
3. Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten. Schreibe die Zahlen auf und sprich dazu.
4. Lege die Zahl 1ZT 1Z auf der Stellenwerttafel. Schreibe die Zahl auf und sprich dazu.
5. Nimm jetzt drei Plättchen. Schätze, wie viele 5-stellige Zahlen du damit legen kannst. Lege alle möglichen 5-stelligen Zahlen in der Stellenwerttafel.
6. Schreibe die Zahlen auf. Sprich dazu!
7. Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten. Schreibe die Zahlen auf und sprich dazu.
8. Wie viele Möglichkeiten hast du gefunden? War deine Schätzung richtig?

A8 Stellenwerttafel

Zu 1.:

Es gibt fünf Möglichkeiten: Das erste Plättchen muss auf der Zehntausenderstelle liegen, damit es eine 5-stellige Zahl wird.
Die zweite Zahl kann an jedem Stellenwert liegen, E, Z, H, T oder ZT, also: 10 001, 10 010, 10 100, 11 000, 20 000.

Zu 5.:

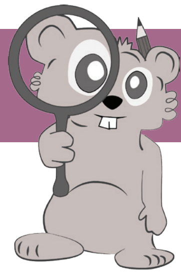
Ziel ist es, durch Ausprobieren zu erkennen, dass ein System benötigt wird, um alle Möglichkeiten zu finden.

So lässt sich systematisch vorgehen, indem man z.B. mit drei Plättchen am ZT anfängt, und dann fortsetzt:

30 000, 21 000, 20 100, 20 010, 20 001, 12 000, 10 200, 10 020, 10 002, 11 100, 11 010, 11 001, 10 110, 10 101, 10 011

Somit ergeben sich insgesamt 15 Möglichkeiten.

A9 Geheimnis der Spiegelzahlen



4352 ist eine 4-stellige Zahl:

Die Tausenderziffer ist 4, die Hunderterziffer ist 3, die Zehnerziffer ist 5 und die Einerziffer ist 2.

Die Tausenderziffer (4) ist um 2 größer als die Einerziffer (2).

Wir wollen nun die Spiegelzahl von 4352 finden. Um eine Spiegelzahl zu finden, musst du die Zahl verkehrt schreiben: Die erste Ziffer (4) wird zur letzten, die zweite (3) zur vorletzten, die dritte Ziffer (5) wird zur zweiten und die letzte (2) kommt ganz nach vorne. Aus 4352 wird also: 2534.

Wenn du das verstanden hast, kann es schon losgehen.

Überlege dir nun eine 4-stellige Zahl. Die Tausenderziffer muss mindestens um 2 größer als die Einerziffer sein. Eine Ziffer darf zweimal verwendet werden.
z.B. 7541

Bilde nun von deiner 4-stelligen Zahl die Spiegelzahl.
z.B. 7541 wird zu 1457

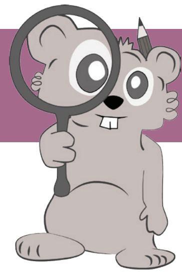
Danach subtrahierst du die Spiegelzahl von deiner Ausgangszahl.
z.B. 7541 – 1457 = 6084

Aus dem Ergebnis deiner Subtraktion, der Differenz, bildest du nun erneut die Spiegelzahl. Dann addierst du die Zahlen:
z. B. 6084 + 4806 = ____

Unterstreiche das Ergebnis der Addition, die Summe. Das ist dein **Endergebnis**.

$$\begin{array}{r} 7541 \\ -\ 1457 \\ \hline 6084 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6084 \\ +\ 4806 \\ \hline \underline{\underline{}} \end{array}$$

A9 Geheimnis der Spiegelzahlen



Wenn du eine Aufgabe gelöst hast, beginne von vorne:

Überlege dir eine neue 4-stellige Zahl. Achte wieder darauf, dass die Tausenderziffer mindestens um 2 größer als die Einerziffer ist ...

Löse so viele Aufgaben wie möglich!
Kannst du das Geheimnis der Spiegelzahlen lüften?

Schau dir immer wieder das **Endergebnis** an und vergleiche es mit den anderen Endergebnissen.
Was kannst du entdecken? Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?
Schau dir auch die Differenz an. Kannst du Zusammenhänge finden?

Schreibe alles auf, was dir auffällt.

A9 Geheimnis der Spiegelzahlen

Insgesamt sind drei Ergebnisse möglich: 10890,10989, 9999

Ergebnis 10890:

$$\begin{array}{r} 7541 \\ -\ 1457 \\ \hline 6084 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6084 \\ +\ 4806 \\ \hline 10890 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5523 \\ -\ 3255 \\ \hline 2268 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2268 \\ +\ 8622 \\ \hline 10890 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5431 \\ -\ 1345 \\ \hline 4086 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4086 \\ +\ 6804 \\ \hline 10890 \end{array}$$

Die Ziffern der Ausgangszahl sind der Größe nach geordnet (z.B. 7541).
Wenn gleiche Ziffern vorkommen, befinden sie sich auf der Tausender- und der Hunderterstelle (z.B. **55**23), oder aber auf der Zehner- und der Einerstelle (z.B. 64**33**).
Nach Subtraktion der Spiegelzahl ergibt sich eine Differenz, die folgendes Muster aufweist: Die äußeren Ziffern ergeben zusammen 10 (z.B. **6**08**4**: 6 + 4 = 10), die inneren Ziffern ergeben zusammen 8 (2**26**8: 2 + 6 = 8).
Durch die Addition der jeweiligen Spiegelzahl kommt es durch die Überträge zu dem Ergebnis 10890.

Ergebnis 10989:

$$\begin{array}{r} 3221 \\ -\ 1223 \\ \hline 1998 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1998 \\ +\ 8991 \\ \hline 10989 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9886 \\ -\ 6889 \\ \hline 2997 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2997 \\ +\ 7992 \\ \hline 10989 \end{array}$$

Auf der Hunderter- und der Zehnerstelle der Ausgangszahl wurden die gleichen Ziffern verwendet (z.B. 3**22**1).
Nach Subtraktion der Spiegelzahl ergibt sich eine Differenz, die folgendes Muster aufweist: Die äußeren Ziffern ergeben zusammen 9 (z.B.**1**99**8**: 1 + 8 = 9), die inneren Ziffern ergeben zusammen 18 (2**99**7: 9 + 9 = 18).
Durch die Addition der jeweiligen Spiegelzahl kommt es durch die Überträge zu dem Ergebnis 10989.

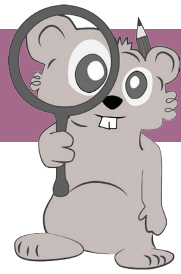
A9 Geheimnis der Spiegelzahlen

Ergebnis 9999:

$$
\begin{array}{r}
6281 \\
-\ 1826 \\
\hline
4455
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5544 \\
+\ 4455 \\
\hline
\underline{\underline{9999}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7683 \\
-\ 3867 \\
\hline
3816
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3816 \\
+\ 6183 \\
\hline
\underline{\underline{9999}}
\end{array}
$$

Die Ziffern der Ausgangszahl sind nicht der Größe nach geordnet (z.B. 8094).
Nach Subtraktion der Spiegelzahl ergibt sich eine Differenz, die folgendes Muster aufweist: Die äußeren Ziffern ergeben zusammen 9 (z.B.**4**45**5**: 4 + 5 = 9), die inneren Ziffern ergeben zusammen 9 (3**81**6: 8 + 1 = 9).
Bei der Addition der jeweiligen Spiegelzahl gibt es keinen Übertrag.
Das Ergebnis ist daher 9999.

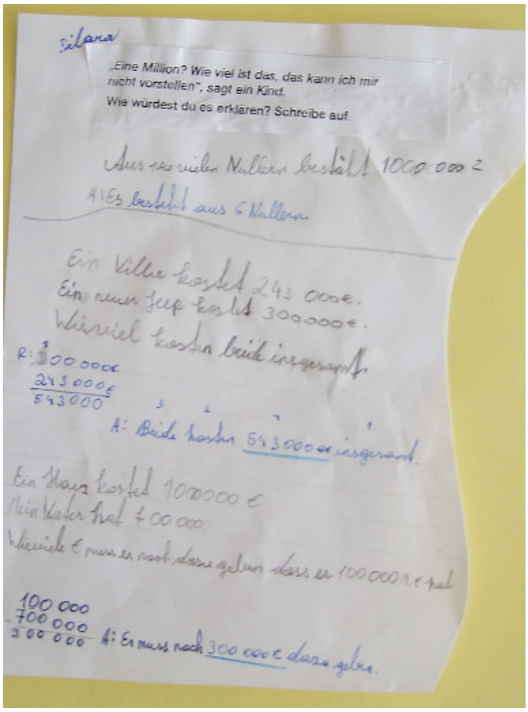
A10 Eine Million



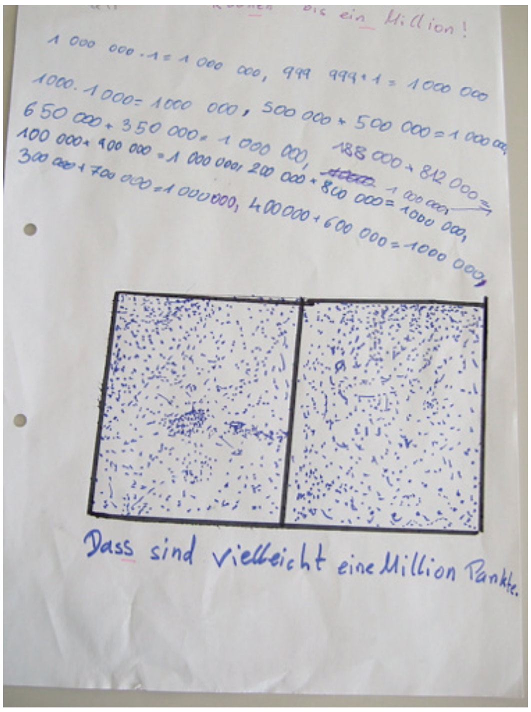
Wie viel ist eigentlich eine Million? Zeichne oder beschreibe.

A10 Eine Million

Diese Lernumgebung fordert dazu auf, über die Dimension des Zahlenraumes bis zur Million nachzudenken. Herangehensweisen und Lösungsmöglichkeiten werden dabei bewusst völlig offengelassen. Zwei Beispiele:

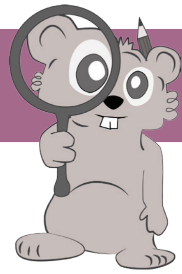


Dilara findet zwei Herangehensweisen: Zuerst führt sie die Anzahl der Nullen an, die eine Million aufweist. Dann überlegt sie sich Objekte, deren Preise sich ungefähr im Zahlenraum von einer Million bewegen, und gestaltet daraus Sachrechnungen.

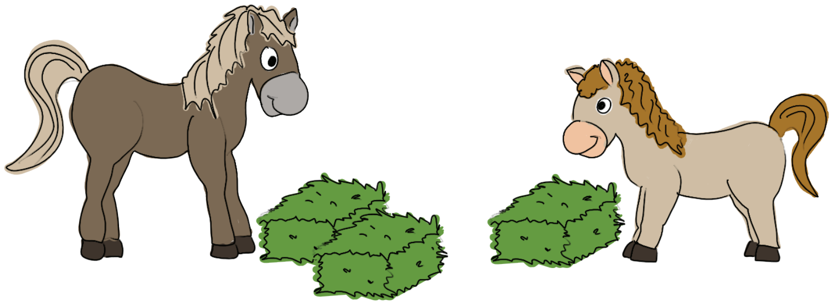


Stefan findet ebenfalls zwei unterschiedliche Wege, um die Million darzustellen. Zuerst entscheidet er sich für unterschiedliche Rechenoperationen, die als Ergebnis die Million haben. Dann versucht er, den Zahlenraum bildlich zu veranschaulichen.

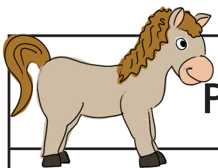
A11 Ponys und Pferde lieben Heu

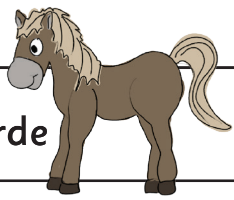


Die Ponys und Pferde in Tante Lisas Reitstall fressen am liebsten Heu.
Ein Pony frisst 20 kg Heu pro Tag.
Ein Pferd frisst 40 kg Heu pro Tag.
Tante Lisa bekommt jeden Tag 200 kg Heu geliefert, damit alle ihre Tiere satt werden.



Wie viele Ponys und wie viele Pferde können mit 200 kg Heu pro Tag satt werden?
Zeichne deine Lösungen auf.
Sammle deine Ergebnisse in der Tabelle. Was fällt dir auf?





Ponys	**Pferde**	**Ponys und Pferde zusammen**

A11 Ponys und Pferde lieben Heu

Entdeckungsmöglichkeiten:

Es gibt sechs unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten bei Ponys und Pferden:

Ponys	Pferde	Ponys und Pferde zusammen
10	0	10
8	1	9
6	2	8
4	3	7
2	4	6
0	5	5

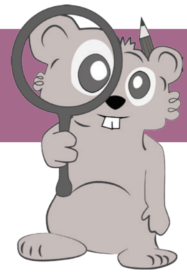
Je mehr Ponys man hat, desto größer ist die gesamte Herde.

Notiert man die Kombinationsmöglichkeiten in der Tabelle strukturiert (siehe oben), lassen sich Zusammenhänge wie in einem Entdeckerpäckchen finden.

Zum Beispiel: Es ist immer eine gerade Anzahl an Ponys zu finden. Es können höchstens fünf Pferde in der Herde sein, etc.

Die Herden sind immer unterschiedlich groß.

A12 Drei Ziffern



Du brauchst: Ziffernkarten von 1 bis 9

1. Wähle drei verschiedene Ziffern.

2. Berechne die Summe (Ziffernsumme).

$\boxed{3} + \boxed{5} + \boxed{4} = 12$

3. Bilde aus den drei Ziffern sechs verschiedene dreistellige Zahlen.

4. Addiere alle sechs Zahlen.

5. Dividiere die Summe durch die Ziffernsumme.

```
 354
 345
 543
 534
 453
 435
 ----
2664
```

```
2664 : 12 = 222
 26
  24
   0R
```

6. Suche dir nun drei andere Ziffernkarten aus. Wiederhole die Schritte 1 bis 5.

7. Wiederhole die Übung. Notiere, was dir auffällt.

8. Welches Ergebnis würdest du erhalten, wenn du andere Ziffernkarten verwendest? Begründe deine Vermutung.

A12 Drei Ziffern

Ein weiteres Beispiel:

1. Gewählte Ziffern: 7, 8, 9
2. Ziffernsumme: 7 + 8 + 9 = 24
3. Alle verschiedenen dreistelligen Zahlen: 789, 798, 897, 879, 987, 978
4. Summe: 789 + 798 + 897 + 879 + 987 + 978= 5328
5. 5328 : 24 = 222

Egal, welche drei Ziffern gewählt werden: Man erhält als Quotient die Zahl 222.

Begründung für das Beispiel:

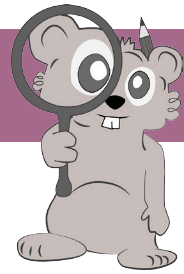
Addiert man alle Einer, so erhält man 48 Einer.
Addiert man alle Zehner, so erhält man 48 Zehner.
Addiert man alle Hunderter, so erhält man 48 Hunderter.
Dividiert man die Summe durch die Ziffernsumme 24, so hat das Ergebnis zwei Einer, zwei Zehner und zwei Hunderter, also 222.

Allgemein:

Die Summe, die bei der Addition aller verschiedenen dreistelligen Zahlen aus den drei verschiedenen Ziffern entsteht, hat die folgenden Eigenschaften:

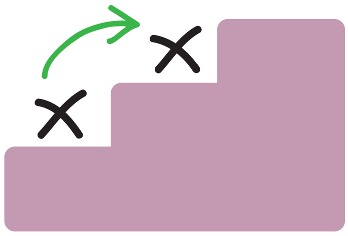
- Die Anzahl der Einer entspricht dem Doppelten der Ziffernsumme.
- Die Anzahl der Zehner entspricht dem Doppelten der Ziffernsumme.
- Die Anzahl der Hunderter entspricht ebenfalls dem Doppelten der Ziffernsumme.
- Dividiert man die Summe durch ihre Ziffernsumme, erhält man somit immer 222.

A13 Treppen steigen

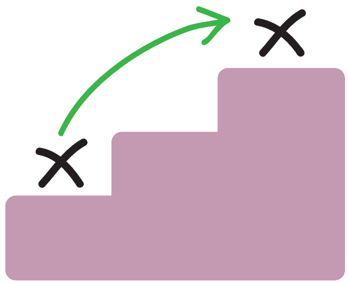


Bei dieser Aufgabe hast du zwei unterschiedliche Möglichkeiten, um eine Treppe hinaufzusteigen.

Du steigst mit jedem Schritt genau eine Stufe höher.



Du steigst mit jedem Schritt genau zwei Stufen höher.



Zum Beispiel:

Die nebenstehende Treppe hat zwei Stufen.
Du hast folgende Möglichkeiten, um nach oben zu kommen:

- Du steigst mit jedem Schritt genau eine Stufe höher und bist in zwei Schritten oben.
- Du steigst mit einem Schritt zwei Stufen höher.

Überlege, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, eine Treppe mit drei Stufen hinaufzusteigen.
Überlege wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, wenn die Treppe vier, fünf oder sechs Stufen hat.

Schreibe deine Ergebnisse in die Tabelle:

Anzahl der Stufen	1	2	3	4	5	6			
Anzahl der Arten	1	2							

Was fällt Dir an den Ergebnissen auf?

Sage mit Hilfe der Tabelle voraus, wie viele verschiedene Möglichkeiten du für eine Treppe mit 7, 8 oder 9 Stufen finden wirst!

A13 Treppen steigen

Folgende Bezeichnungsweise wird verwendet:
E ... mit diesem Schritt wird genau **eine** Stufe höher gestiegen
Z ... mit diesem Schritt werden genau **zwei** Stufen höher gestiegen.

Wie kannst du eine Treppe mit drei Stufen hinaufsteigen?

Man kann jede Stufe einzeln nehmen.	EEE
Man kann die ersten beiden Stufen auf einmal nehmen und dann eine einzeln.	ZE
Man kann die erste Stufe einzeln nehmen und dann zwei Stufen in einem Schritt.	EZ

Welche Möglichkeiten gibt es, wenn die Treppe vier, fünf, sechs Stufen hat?

Treppe mit vier Stufen:	EEEEE, ZEE, EZE, EEZ, ZZ	5
Treppe mit fünf Stufen:	EEEEE, ZEEE, EZEE, EEZE, EEEZ, ZZE, ZEZ, EZZ	8
Treppe mit sechs Stufen:	EEEEEE, ZEEEE, EZEEE, EEZEE, EEEZE, EEEEZ ZZEE, ZEZE, ZEEZ, EZZE, EEZZ, EZEZ, ZZZ	13

Schreibe deine Ergebnisse in die Tabelle.

Anzahl der Stufen	1	2	3	4	5	6			
Anzahl der Arten	1	2	3	5	8	13			

A13 Treppen steigen

Was fällt dir an deinen Ergebnissen auf?

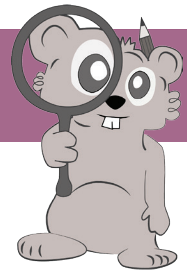
Die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten wird immer größer.
Erhöht man die Anzahl der Stufen um 1, so erhält man die Anzahl der Möglichkeiten, indem man die beiden vorherigen Anzahlen addiert.

$1 + 2 = 3$
$2 + 3 = 5$
$3 + 5 = 8$
$5 + 8 = 13$

Kannst du nur mit Hilfe der Ergebnisse voraussagen, wie viele verschiedene Möglichkeiten es für eine Treppe mit sieben, acht oder neun Stufen gibt?

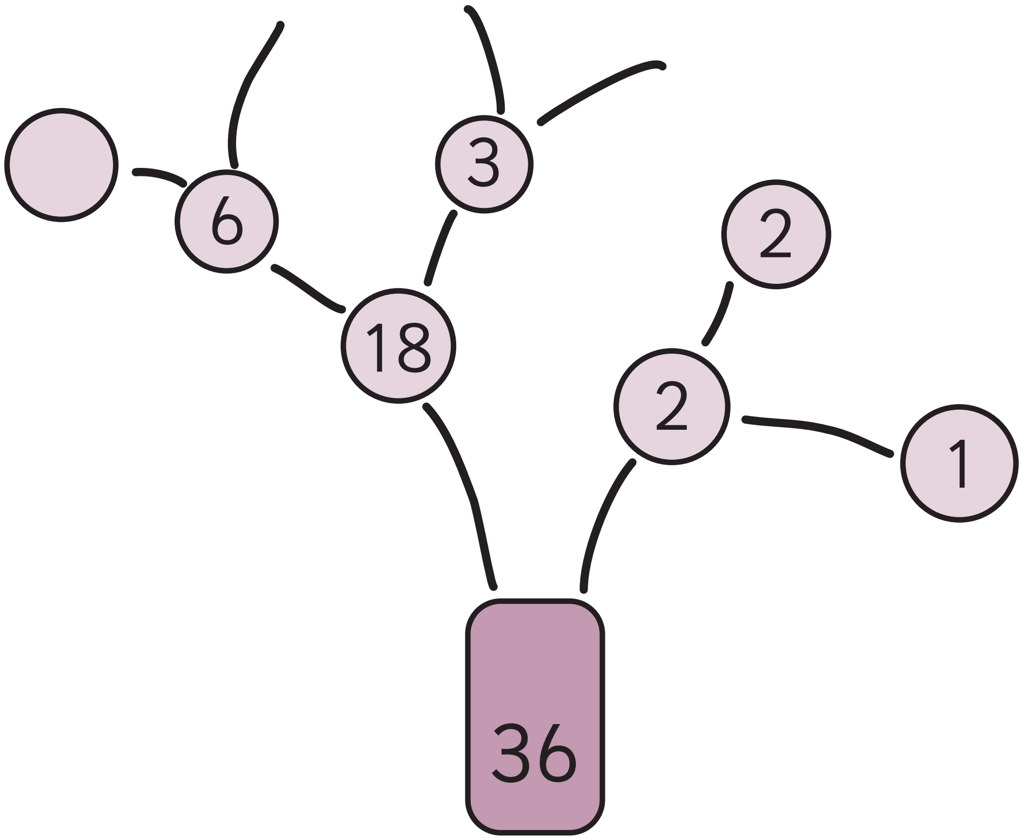
Bei sieben Stufen: $8 + 13 = 21$
Bei acht Stufen: $13 + 21 = 34$
Bei neun Stufen: $21 + 34 = 55$

A14 Zahlenbäume



Suche dir eine Zahl zwischen 10 und 50 aus. Das ist der Stamm deines Zahlenbaumes. Nun lass die Äste wachsen – welche beiden Zahlen ergeben multipliziert deine Stamm-Zahl? Schreibe sie an.
Auch diese Äste verästeln sich weiter.

Hier siehst du schon einen Zahlenbaum aufgezeichnet:



Dieser Zahlenbaum ist noch nicht zu Ende gewachsen – zeichne seine Äste fertig!

Wann hörst du mit dem „Verästeln“ auf?

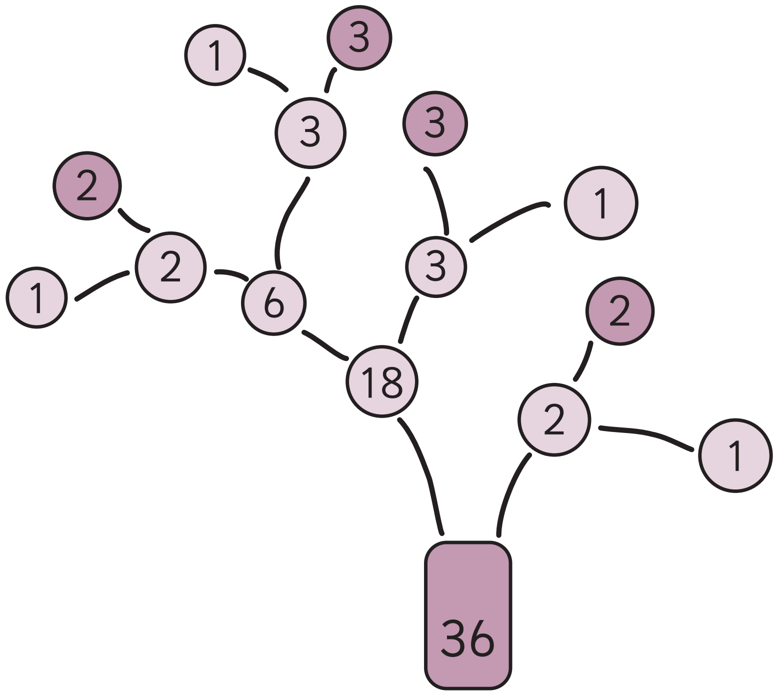
Suche dir selbst Stammzahlen aus und lass Zahlenbäume wachsen!

Welche Zahlen ergeben große Bäume, welche kleine?

Schauen Bäume mit gleichem Stamm immer gleich aus? Was fällt dir auf?

Zahlenbäume

Der fertige Zahlenbaum könnte so aussehen:

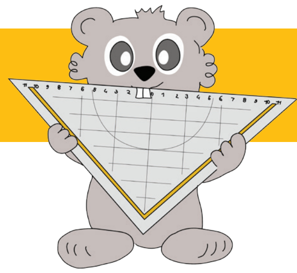


Wann hörst du mit dem „Verästeln“ auf?
Wenn 1 als letzter möglicher Faktor auftaucht, ist es sinnvoll aufzuhören.

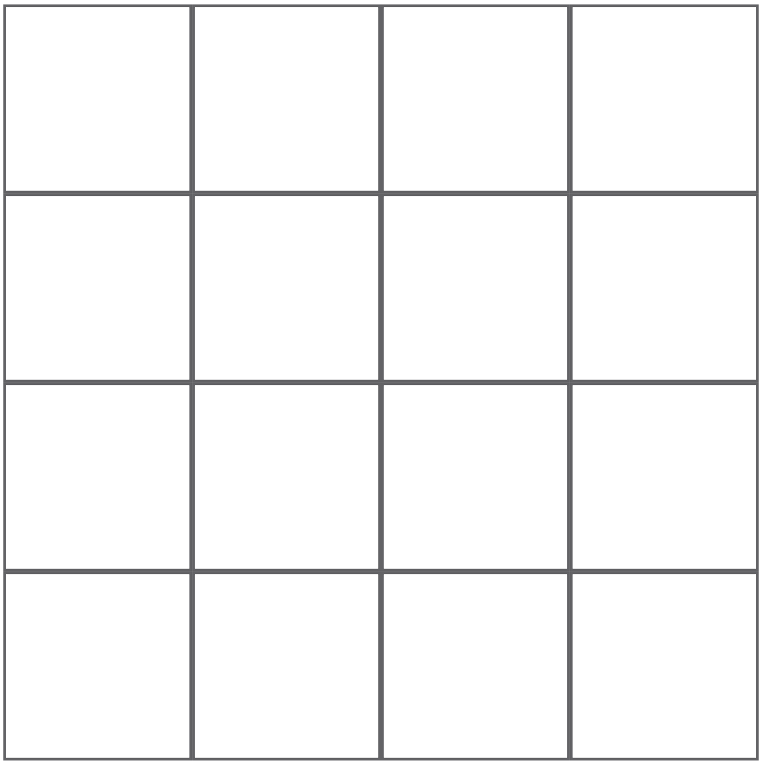
Welche Zahlen ergeben große Bäume, welche kleine?
Es ergeben jene Stammzahlen große Bäume, die aus vielen Primfaktoren bestehen. Zur Erinnerung: Primzahlen sind nur durch sich selbst und eins ohne Rest teilbar. Es gibt unendlich viele: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Je mehr Primzahlen (auch mehrmals die gleichen) als Faktoren in der Stammzahl enthalten sind, desto größer werden die Bäume. Dabei gilt auch: Nicht notwendigerweise ergeben größere Stammzahlen auch größere Bäume.

Schauen Bäume mit gleichem Stamm immer gleich aus? Was fällt dir auf?
Die Bäume sehen nicht völlig gleich aus, da unterschiedliche Zerlegungen der Stammzahl gewählt werden können. Allerdings wachsen immer die gleichen Zahlen an den äußersten Ästen (oben dunkler gefärbt). Diese geben die eindeutige Primfaktorzerlegung der Stammzahl an.
Im Beispiel oben: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

G1 Kleine und große Quadrate



Du brauchst: ein Geodreieck, eine Schere

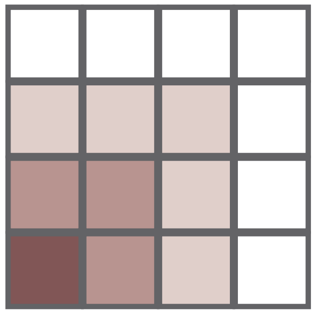


Auf dem Feld kannst du viele kleine Quadrate sehen. Du kannst aber noch andere Quadrate entdecken. Sie sind unterschiedlich groß.

1. Gib an, welche Quadrate du findest und schreibe auf, aus wie vielen kleinen Quadraten sie jeweils bestehen.
2. Miss die entdeckten Quadrate ab und zeichne sie auf ein Blatt Papier. Schneide sie aus. Zeichne auch ein kleines Quadrat und schneide es aus.
3. Nimm nun ein ausgeschnittenes Quadrat und lege es auf das Feld. Überlege für jede einzelne Größe, auf wie viele Arten es auf das Feld aufgelegt werden kann. Notiere deine Ergebnisse auf den ausgeschnittenen Quadraten.
4. Schreibe auf, wie viele Quadrate du insgesamt entdeckt hast.

G1 Kleine und große Quadrate

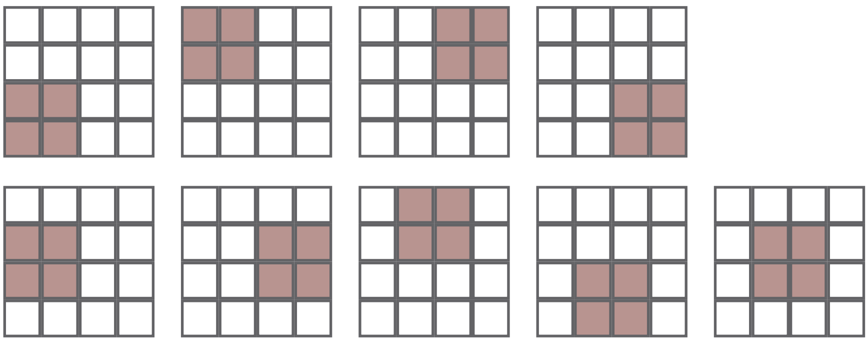
1. Das kleine Quadrat besteht aus einem kleinen Quadrat.
   Ein Vierer-Quadrat besteht aus 4 kleinen Quadraten.
   Ein Neuner-Quadrat besteht aus 9 kleinen Quadraten.
   Ein Sechszehner-Quadrat besteht aus 16 kleinen Quadraten.



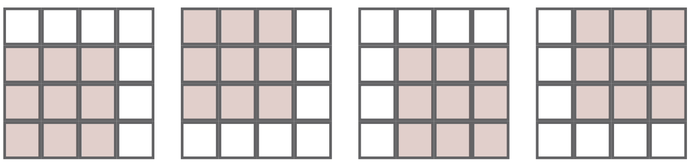
2. Kleines Quadrat: a = 2,5 cm
   Vierer-Quadrat: a = 5 cm
   Neuner-Quadrat: a = 7,5 cm
   Sechzehner-Quadrat: a = 10 cm

3. Kleines Quadrat: Das kleine Quadrat kann auf 16 verschiedene Arten auf das Feld gelegt werden – auf je ein Feld der insgesamt 16 Felder.

   Vierer-Quadrat: Das Vierer-Quadrat kann auf neun verschiedene Arten auf das Feld gelegt werden:



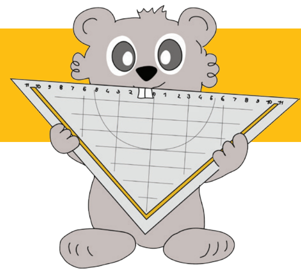
   Neuner-Quadrat: Das Neuner-Quadrat kann auf vier verschiedene Arten auf das Feld gelegt werden:



   Sechzehner-Quadrat: Das Sechzehner-Quadrat kann auf eine Art auf das Feld gelegt werden.

4. Insgesamt sind es 30 Quadrate:
   16 kleine Quadrate
   9 Vierer-Quadrate
   4 Neuner-Quadrate
   1 Sechzehner-Quadrat

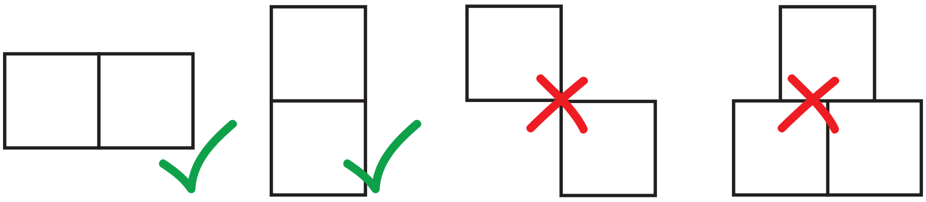
G2 Quadratvierlinge



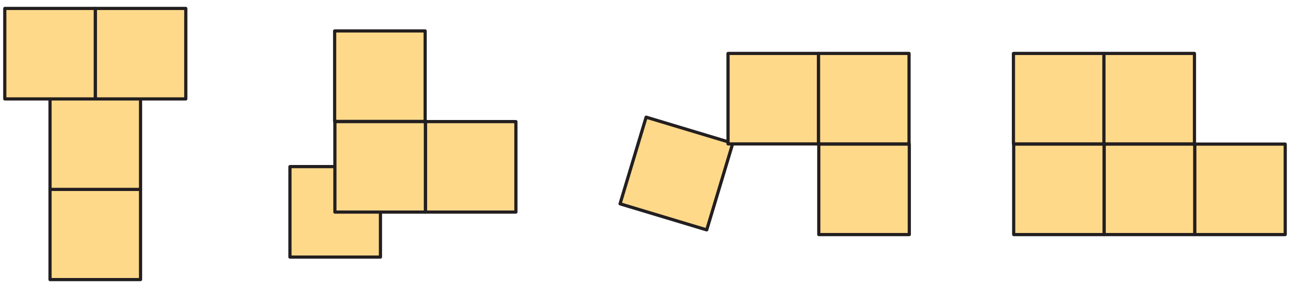
Du brauchst: sieben verschiedenfarbige, quadratische Notizzettel, Schere, Kästchenpapier

Aus vier Quadraten kann man einen Quadratvierling machen:
Man legt dazu aus genau vier Quadraten eine Figur nach folgenden Regeln:

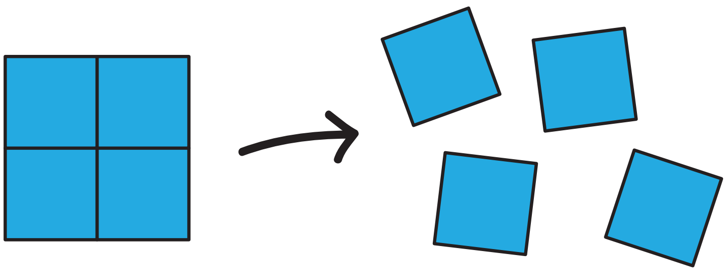
- Quadrate dürfen nicht überlappend gelegt werden.
- Quadrate müssen sich an einer Seite berühren.



Warum sind die hier gezeichneten Figuren keine Quadratvierlinge?



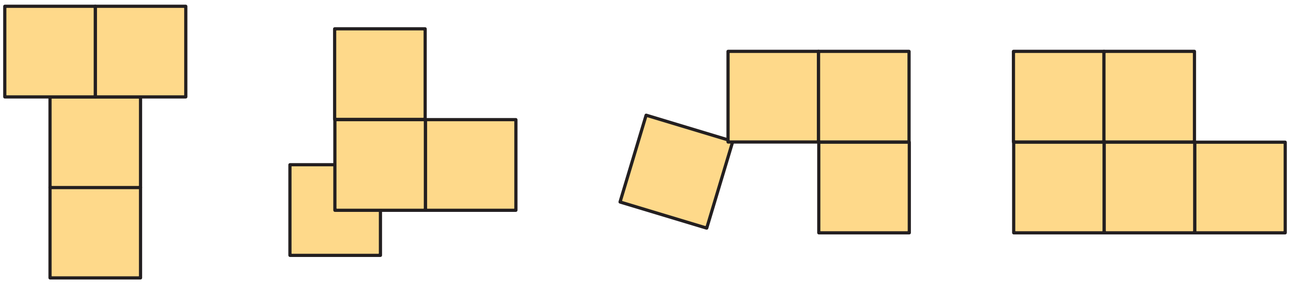
Schneide jeden Notizzettel in vier Quadrate.



Lege mit diesen Quadraten einfarbige Quadratvierlinge.
Wie viele verschiedene Figuren findest du?
Zeichne die Figuren auf.
Was fällt dir auf?

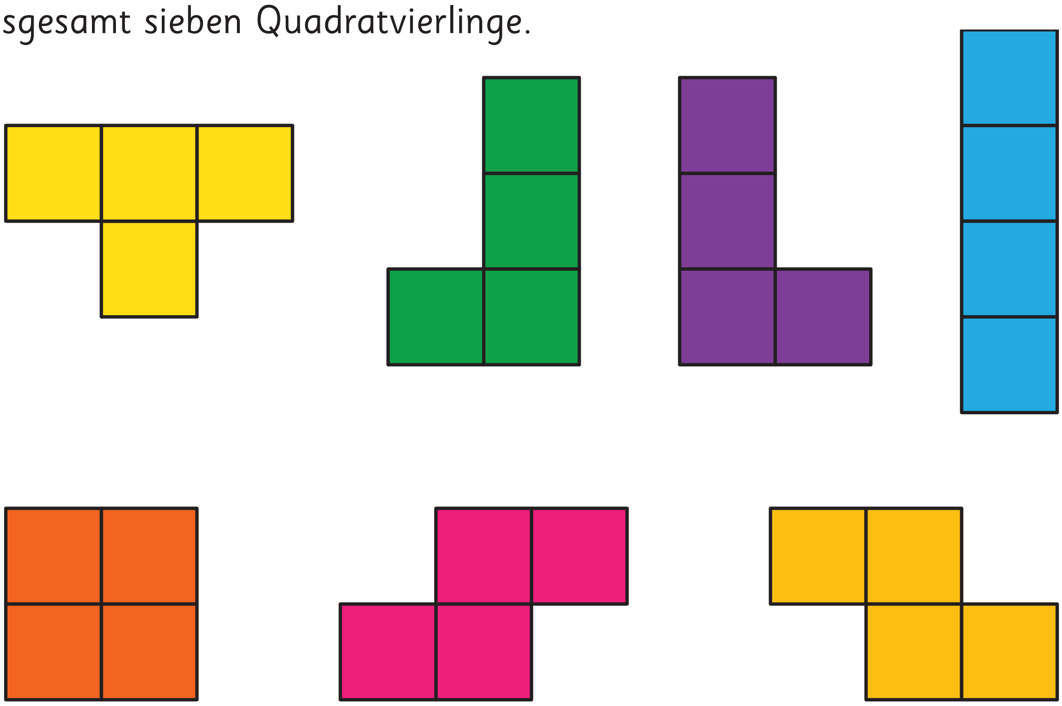
Such dir eine/n Partner/in.
Gemeinsam habt ihr nun zwei Sets der Quadratvierlinge.
Schafft ihr es, aus jeweils vier Figuren ein großes Quadrat zu legen?
Findet ihr mehrere Möglichkeiten?
Zeichnet eure Lösungen auf.

G2 Quadratvierlinge



Die oberen zwei Quadrate berühren nicht eine Seite, sondern nur eine halbe Seite.
Ein Quadrat ist überlappend gelegt.
Ein Quadrat berührt nur an einer Ecke.
Die Figur besteht aus fünf Quadraten, ist daher kein QuadratVIERling

Es gibt insgesamt sieben Quadratvierlinge.

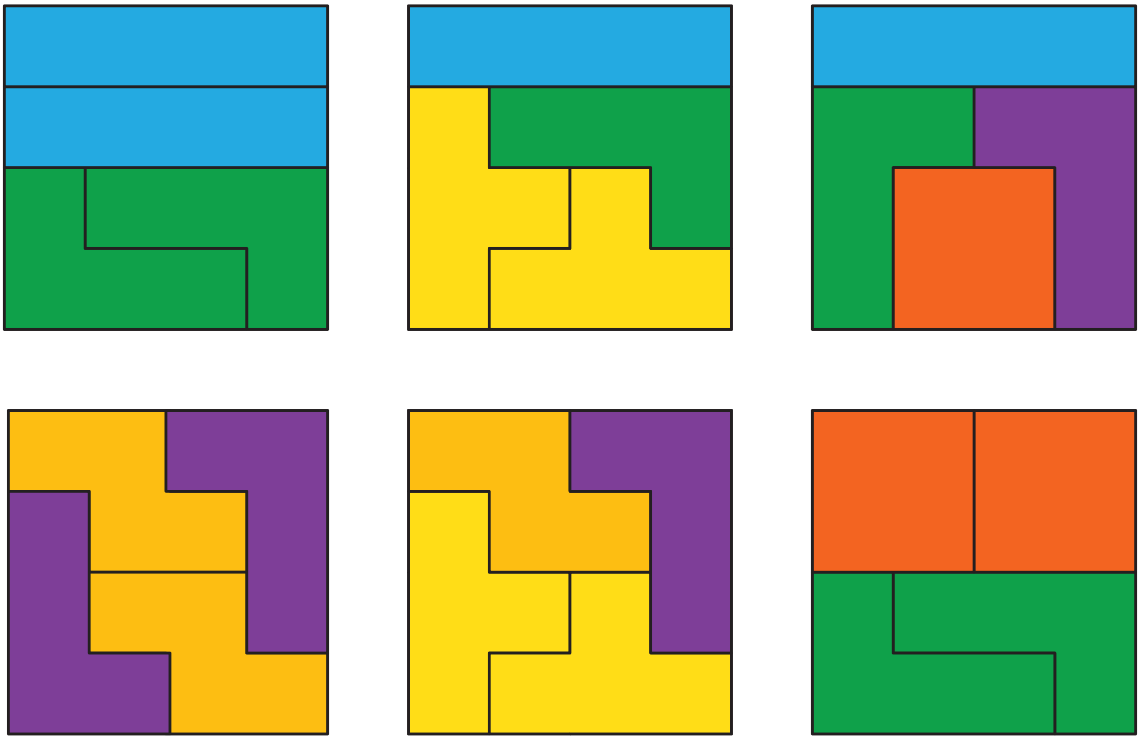


Mögliche Entdeckungen:

Alle Figuren sind genau vier Quadrate groß.
Manche Figuren schauen Buchstaben ähnlich:
Die gelbe Figur ähnelt einem T, die grüne einem J, die lila Figur einem L, die blaue Figur einem I, die rote Figur einem S, und die orange Figur einem Z.
Manche Figuren sind zueinander gespiegelt: J und L, S und Z.

G2 Quadratvierlinge

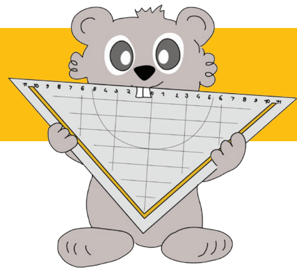
Einige mögliche Lösungen für die „großen“ Quadrate:



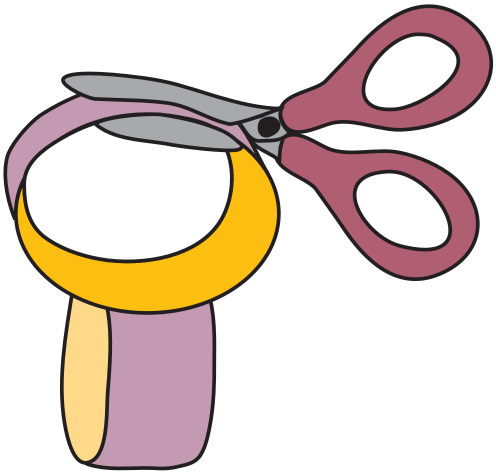
Fortsetzung:
Schaffst du ein Rechteck ($7 \cdot 4 = 28$) mit einem Set, also allen sieben Figuren, zu legen?

Nein, das geht nicht. Man muss sich nur jeden Quadratvierling wie ein Schachbrett angemalt vorstellen: Jedes Quadrat wird entweder schwarz oder weiß angemalt: Um das Rechteck auslegen zu können, bräuchte man die gleiche Anzahl an schwarzen und weißen Feldern. Bei den Quadratvierlingen ist die Anzahl allerdings unterschiedlich.

G3 Zwei Ringe



Du brauchst: zwei gleich lange Papierstreifen (Länge: ca. 20 cm, Breite: ca. 5cm), Klebstoff, Schere



Aus einem ganz einfachen Gebilde ein noch einfacheres zu machen: wahrscheinlich langweilig, oder? Nicht, wenn du dieses Experiment durchführst:

1. Mach – wie auf dem Bild oben – aus jedem Papierstreifen einen Ring.
2. Klebe die beiden Ringe aufeinander (Achtung: Sie sollen keine 8 bilden, sondern wie auf dem Bild aussehen! Achte auch darauf, dass die gesamte Kontaktfläche mit Klebstoff bedeckt ist!)
3. Schneide einen Ring längs in der Mitte durch, auch durch die Klebefläche! Was kommt heraus? Hättest du das vermutet?
4. Schneide jetzt den Streifen durch!

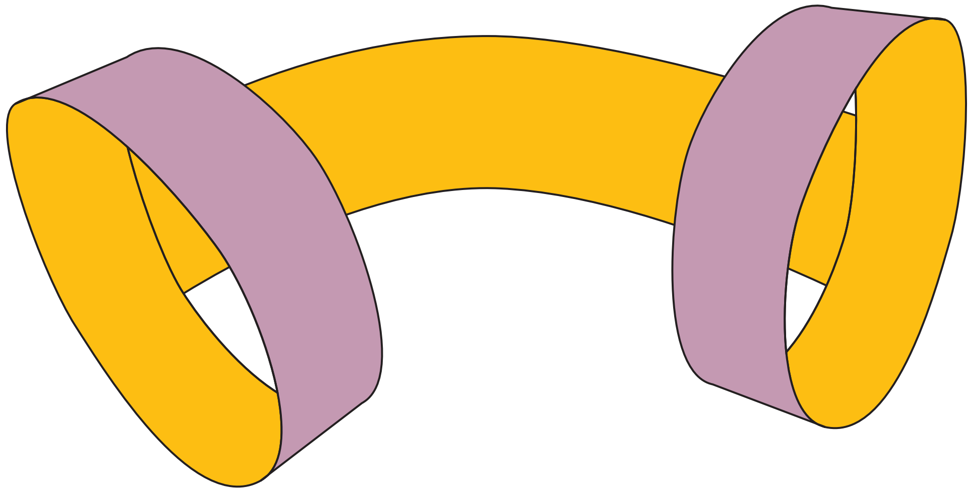
Die beiden Ringe werden in ______________________________ verwandelt.

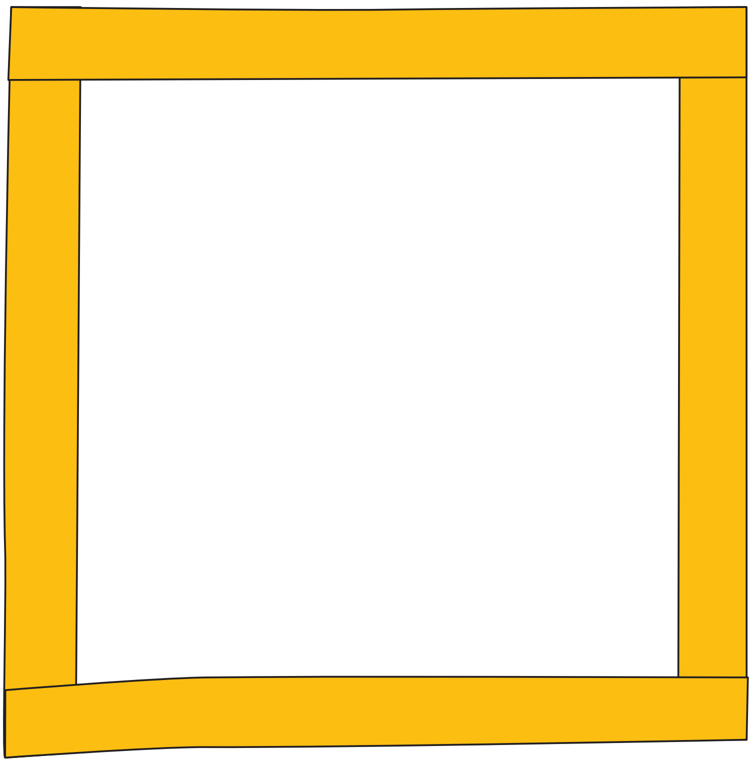
Kannst du wieder die beiden Ringe formen?

Weitere Versuche:

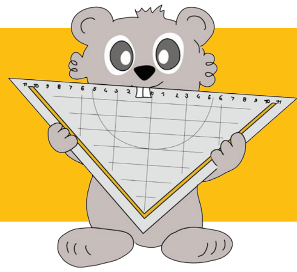
- Was kommt heraus, wenn die beiden Papierstreifen verschiedenfarbig sind?
- Welche Figur ergibt sich, wenn die Papierstreifen nicht gleich lang sind?
- Welche Figur ergibt sich, wenn die Ringe nicht im rechten Winkel zusammengeklebt werden?

Zwei Ringe





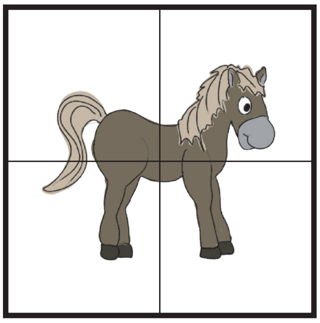
G4 Pferde und Ponys auf der Weide



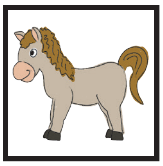
Du brauchst: eine Schere

Pferde und Ponys brauchen auf der Weide unterschiedlich viel Platz zum Grasen.

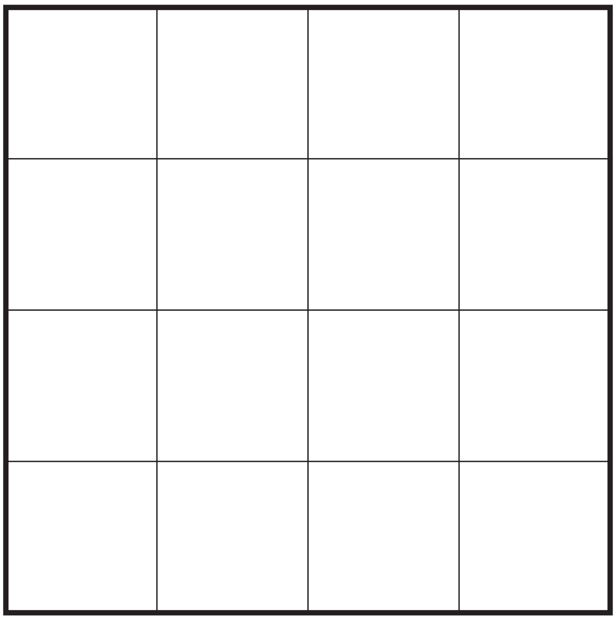
Pferde brauchen so viel Platz:



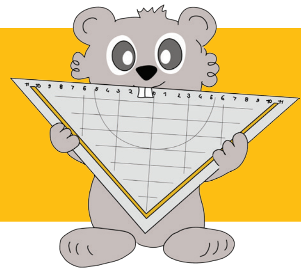
Ponys brauchen so viel Platz:



1. Lass Ponys und Pferde so auf dieser Weide grasen, dass kein Platz freibleibt. (Du kannst dafür das Pferd und das Pony oben ausschneiden, wenn du möchtest.)



G4 Pferde und Ponys auf der Weide



2. Finde möglichst viele unterschiedliche Möglichkeiten, die Weide zu füllen.

3. Wie kannst du am einfachsten alle möglichen Lösungen finden? Schreib es auf.

4. Trage in die Tabelle ein, wie viele Pferde und Ponys jeweils gleichzeitig auf der Weide grasen können:

Ponys	Pferde

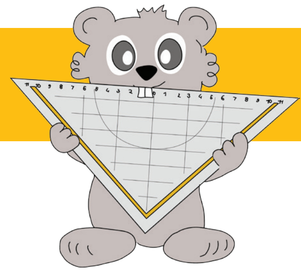
G4 Pferde und Ponys auf der Weide

Lösungsmöglichkeiten, wenn die Weide ausgefüllt ist:

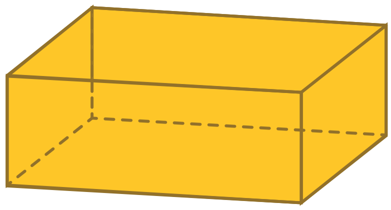
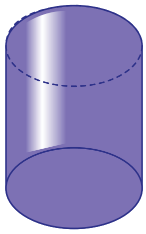
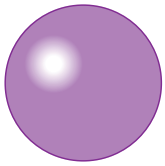
Ponys	Pferde
16	0
12	1
8	2
4	3
0	4

Die Schüler*innen könnten herausfinden, dass jedes Pferd durch vier Ponys ersetzt werden kann, weil die Fläche, die das Pferd benötigt, viermal so groß ist.

Körper finden

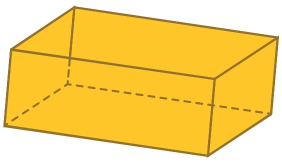
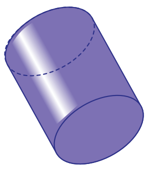
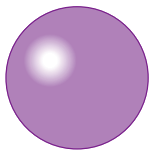


Wie heißen diese Körper? Schreibe die Namen auf die Linien darunter.

________________ ________________ ________________

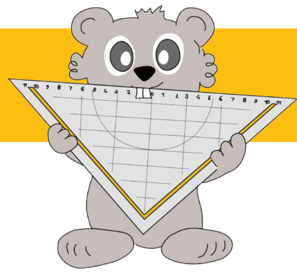
Suche Dinge aus deiner Umgebung, die so aussehen wie diese Körper.
Zeichne, klebe oder schreibe in die Tabelle, was du gefunden hast.

G5 Körper finden

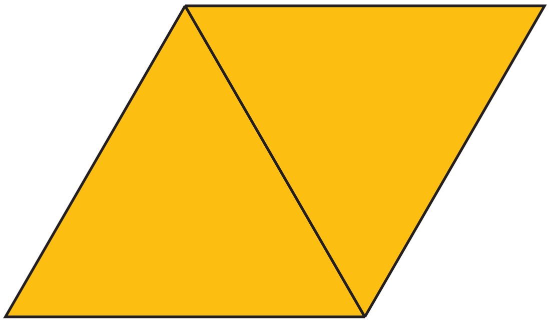
Die Körper heißen Quader, Zylinder und Kugel.

G6 Aus Dreiecken Figuren legen



Du brauchst: viele gleichseitige Dreiecke (siehe Vorlage)

Zwei Dreiecke kannst du Seite an Seite aneinanderlegen.



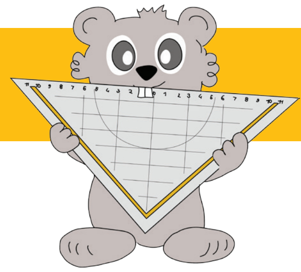
Lege **drei Dreiecke** immer Seite an Seite aneinander.
Warum gibt es nur eine Lösung? Begründe!

Wie viele Möglichkeiten findest du, wenn du **vier Dreiecke** verwendest?

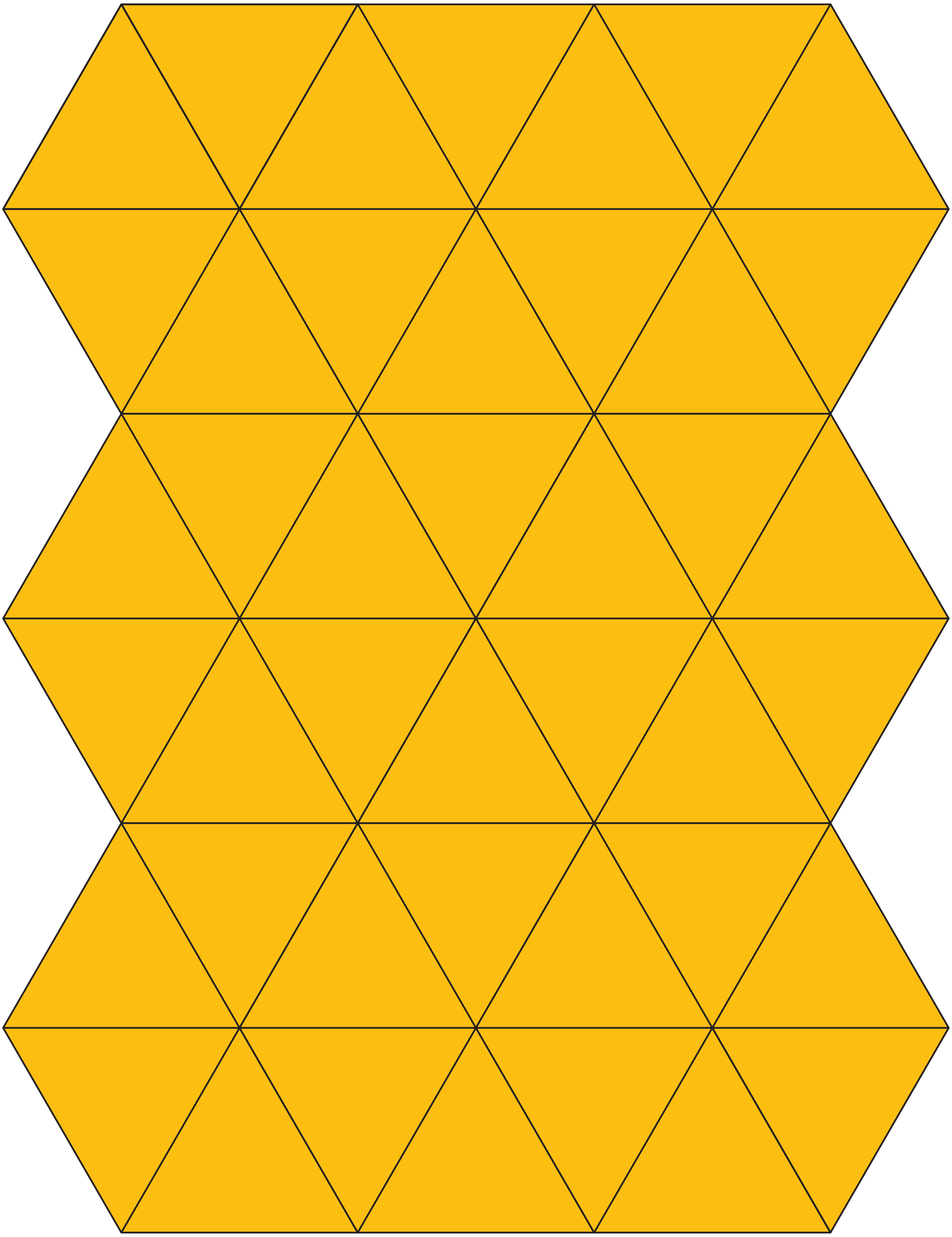
Wie viele Möglichkeiten findest du, wenn du **fünf Dreiecke** verwendest?

Wie viele Möglichkeiten findest du, wenn du **sechs Dreiecke** verwendest?

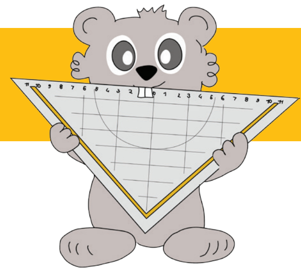
G6 Aus Dreiecken Figuren legen



Vorlage: gleichseitige Dreiecke zum Ausschneiden



G6 Aus Dreiecken Figuren legen

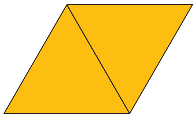


Skizziere deine Ergebnisse hier:

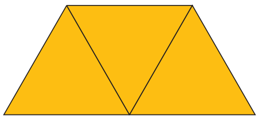
G6 Aus Dreiecken Figuren legen

Um keine Möglichkeit zu übersehen, ist hier ein strukturiertes Vorgehen anzuregen.
Warum gibt es nur eine Möglichkeit drei Dreiecke aneinander zu legen?
Egal, an welcher Seite man an die gegebene Figur aus zwei Dreiecken das dritte Dreieck anlegt, erhält man immer dieselbe Figur.

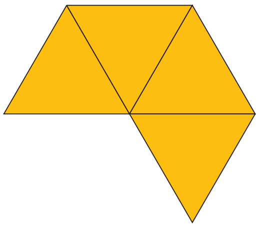
Zwei Dreiecke
1 einzige Möglichkeit

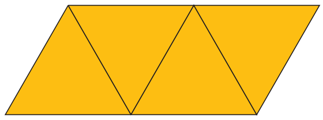


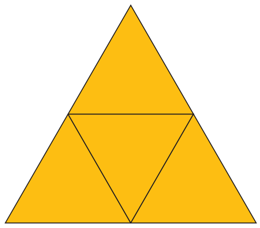
Drei Dreiecke
1 einzige Möglichkeit



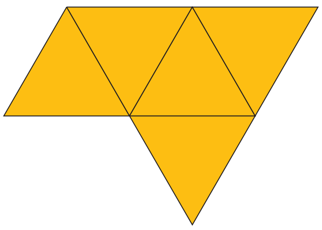
Vier Dreiecke
3 Möglichkeiten

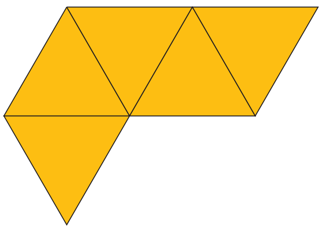


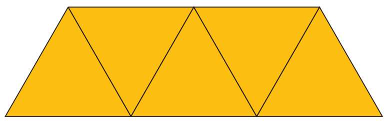


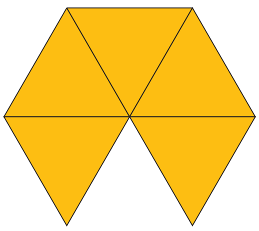


Fünf Dreiecke
4 Möglichkeiten



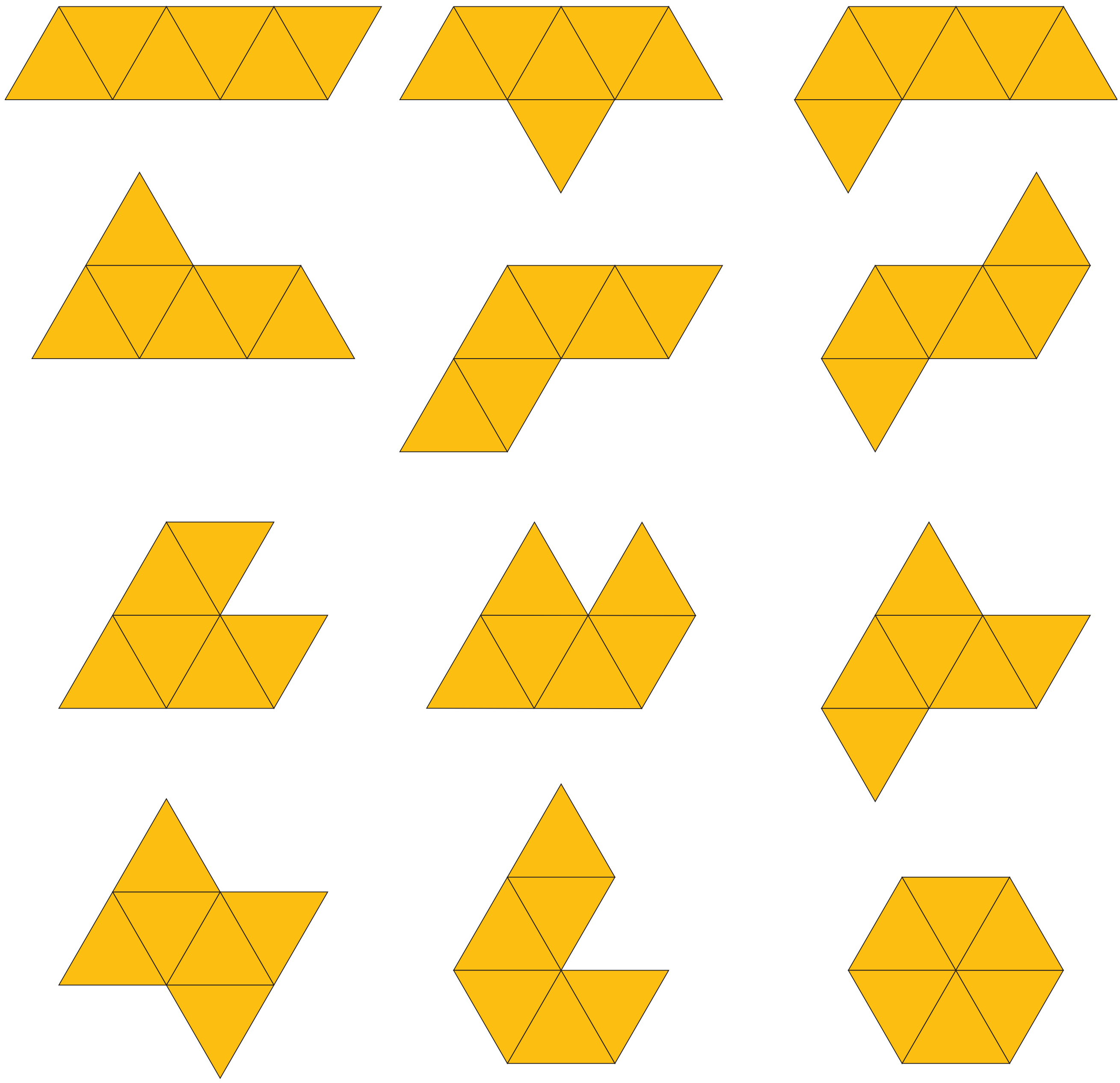




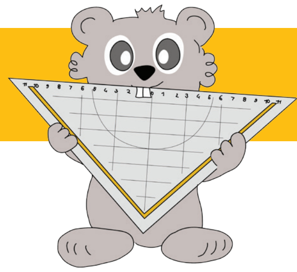


G6 Aus Dreiecken Figuren legen

Sechs Dreiecke
12 Möglichkeiten



G7 Schatzsuche im Labyrinth



Du brauchst: Münzen oder Plättchen, Sichtschutz, Spielfigur, Vorlage Labyrinth

Im großen Labyrinth von Knossos ist ein Schatz versteckt! Ariadne macht sich auf, den Schatz zu finden. Ihr Freund Ikaros hilft ihr: Er fliegt mit seinen selbstgebauten Flügeln über dem Labyrinth und ruft ihr den Weg zu. Nur er sieht, wo der Schatz ist.

Spielt zu zweit:

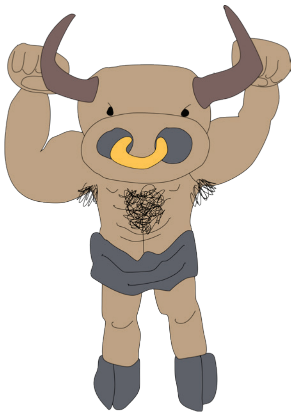
Ihr habt beide euer Labyrinth vor euch liegen. Spieler*in 1 legt eine Münze oder ein Plättchen irgenwo ins Labyrinth. Das ist der Schatz.

Spieler*in 2 **darf nicht hinsehen** und stellt die Spielfigur zum Eingang ihres/seines Labyrinths. Die Schatzsuche beginnt!

Spieler*in 1 beschreibt den Weg zum Schatz.
Spieler*in 2 fährt mit der Spielfigur den angesagten Weg.

Seid ihr ein gutes Team? Findet ihr den Schatz ohne Probleme?

Spielt zu dritt:

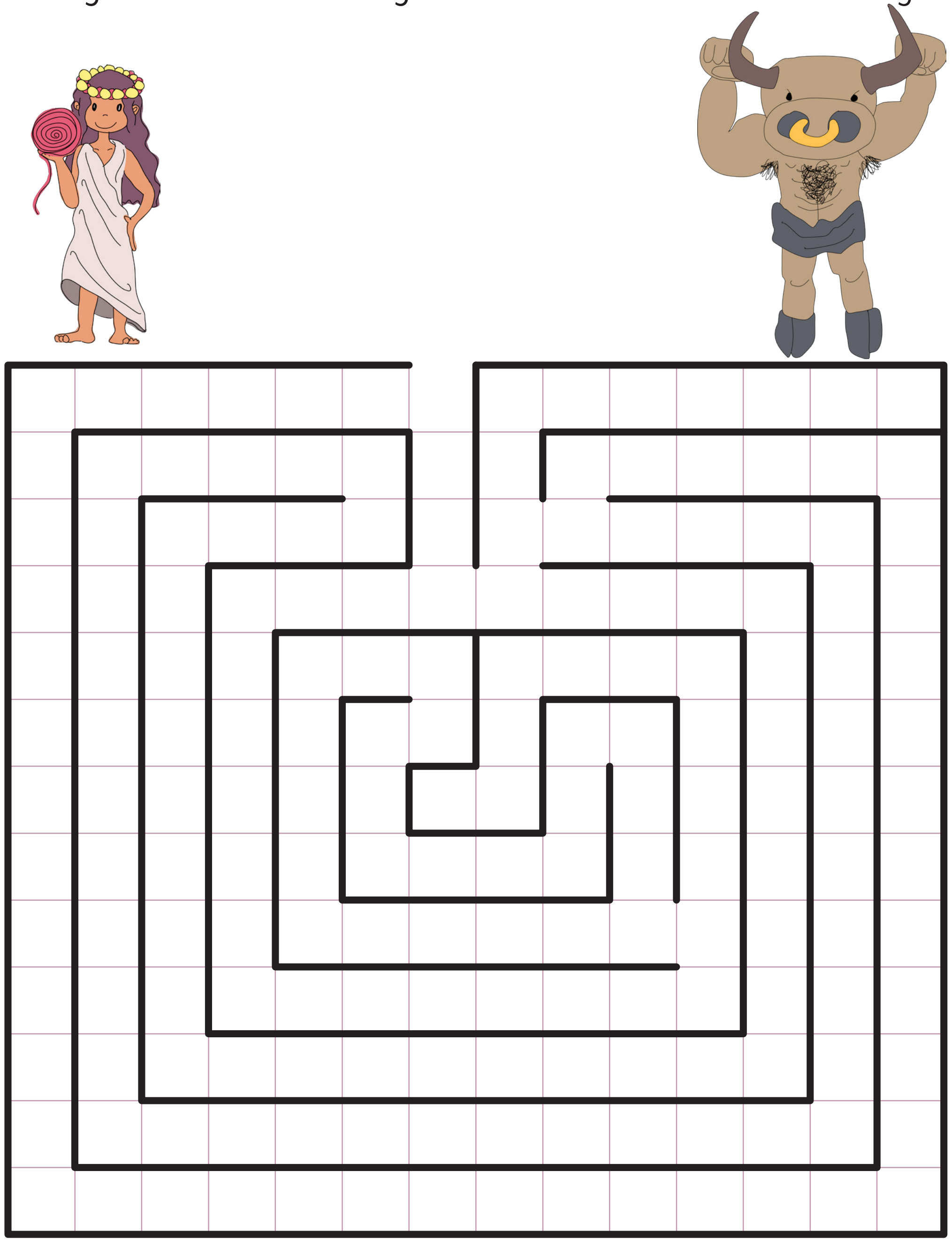


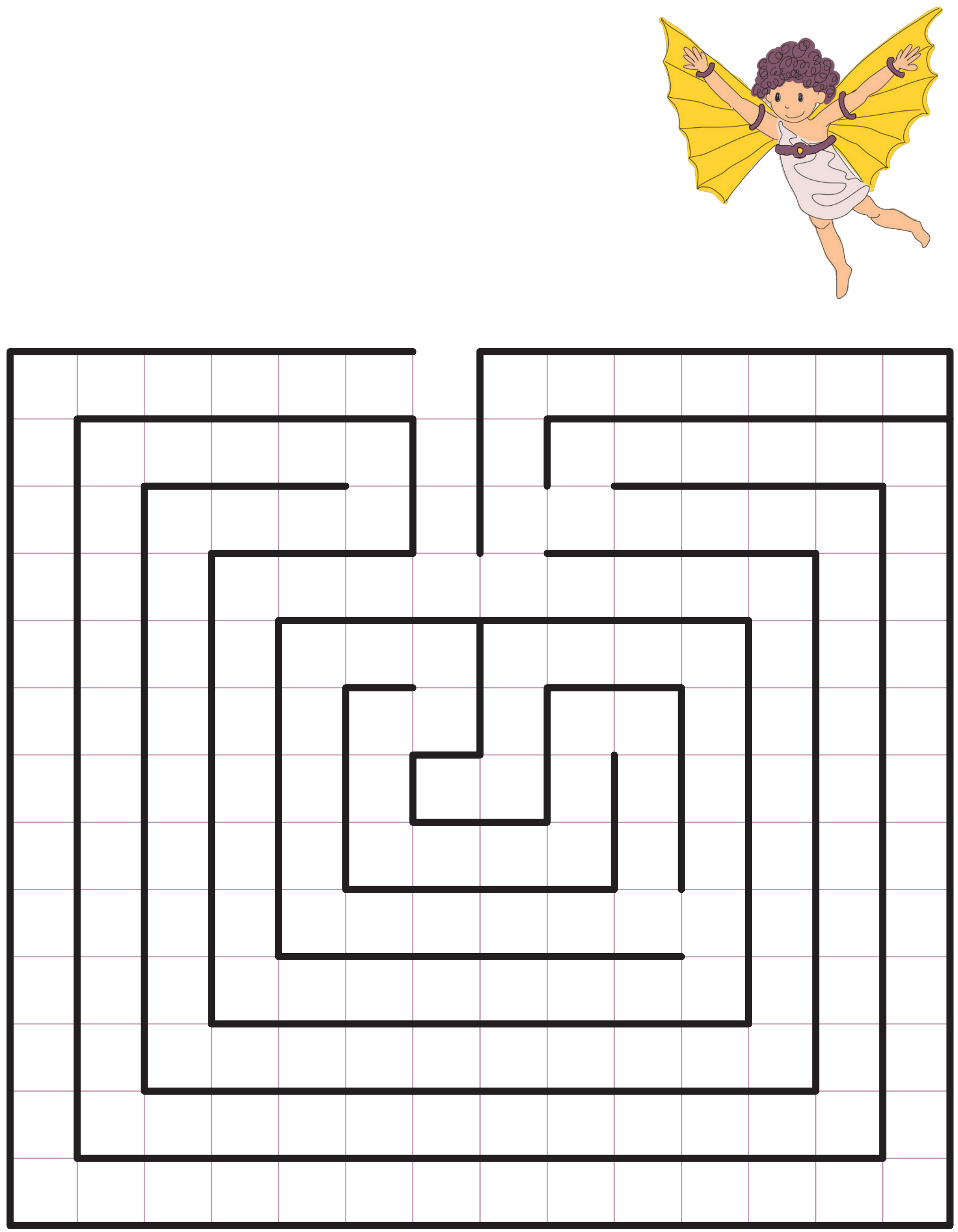
Spieler*in 3 nimmt eine andere Spielfigur und stellt sie entfernt vom Eingang in das Labyrinth von Spieler*in 2. Das ist Minotauros.
Er ist halb Mensch und halb Stier und sehr wütend, weil Ariadne und Ikaros den Schatz holen wollen.
Er darf immer nach Ariadne (Spieler*in 2) ziehen: Geradeaus bis zur nächsten Mauer oder bis einer Abzweigung.

Erwischt Minotauros Spieler*in 1, hat Minotauros gewonnen.
Kommt Ariadne zum Schatz, bevor Minotauros sie erwischt, haben Ariadne und Ikaros gewonnen.

Variante: Bringt den Schatz auch wieder aus dem Labyrinth heraus (ohne von Minotauros gefangen zu werden).
Ariadne darf beim Rückweg **einmal** schnell an Minotauros vorbeilaufen: Sie trägt einen magischen leuchtenden Kranz am Kopf, mit dem sie ihn blendet.

Vorlage: Schneide an der gestrichelten Linie die beiden Labyrinthe auseinander.





G7 Schatzsuche im Labyrinth

Im Spiel soll Orientierung im Raum geübt werden.
Mit Hilfe der Satzbausteine aus der Sprechblase soll Spieler*in 2 (Ikaros) Spieler*in 1 (Ariadne) durchs Labyrinth hin zum Schatz lotsen.
Nur Spieler*in 2 weiß, wo der Schatz ist. Auf seinem / ihrem Labyrinth ist Ikaros mit Flügeln zu sehen.

Spieler*in 1 folgt den Anweisungen von Spieler*in 2 bis zum Schatz.

Spieler*in 2 muss sowohl wissen, wohin Spieler*in 1 gehen soll, als auch, wo sich Spieler*in 1 gerade im Labyrinth befindet. Es kann zur Erleichterung ein Plättchen verwendet werden, mit dem Spieler*in 2 die Position von Spieler*in 1 nachverfolgt. Spieler*in 1 sieht in ihrem Labyrinth nur die eigene Spielfigur bzw. auch die des Minotauros bei drei Spieler*innen.

Die Schüler*innen können das Spiel steuern und variieren:

- Der Schatz kann in der Mitte versteckt werden = längerer Weg, komplexer
- Der Schatz kann nahe des Eingangs versteckt werden = kürzerer Weg, einfacher
- Die Spielrollen sollen auch vertauscht werden.
- Wenn ein Fehler passiert, kann dies mit einem Strich am Rand des Labyrinths markiert werden. Ziel sind möglichst wenige Fehler.
- Um die Anweisungen links / rechts richtig zu geben, kann das Labyrinth auch gedreht werden.

Die Geschichte ist an die griechische Mythologie angelehnt:

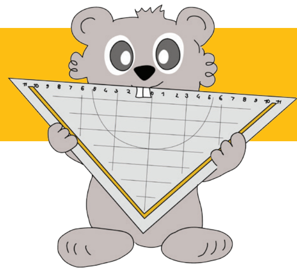
König Minos lässt vom Baumeister und Erfinder Daidalos, dessen Sohn Ikaros ist, auf Knossos ein Labyrinth bauen. Darin sperrt er den Sohn seiner Frau Pasiphäe mit einem Stier, den Minotauros, ein und lässt von ihm seinen Schatz bewachen.

Minos Tochter Ariadne verliebt sich in den Helden Theseus, dem sie mit ihrem Wollfaden hilft, den Schatz zu finden. Den Tipp dazu gibt ihr Daidalos. König Minos ist sehr wütend auf ihn, und lässt ihn und seinen Sohn im Labyrinth auf der Insel einsperren. Mithilfe selbst gebauter Flügel versuchen sie zu fliehen.

Theseus wollte eigentlich Ariadne heiraten und mit ihr wegsegeln, lässt sie dann aber alleine auf Naxos zurück.

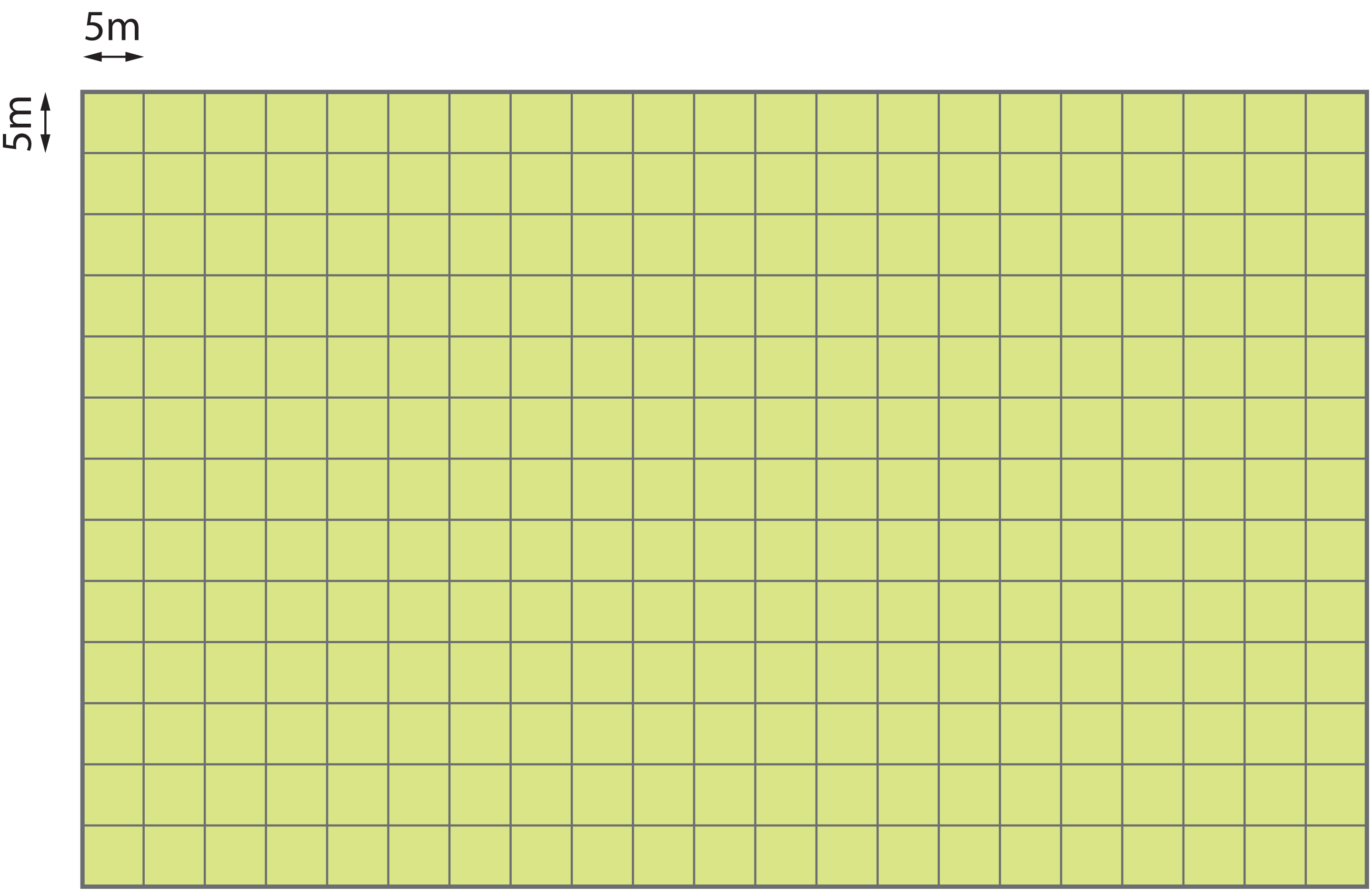
Der Kranz, den Ariadne trägt, wird später zum Sternbild der Nördlichen Krone.

G8 Immer 100 Meter



Ein Bauer hat eine große Wiese, auf der er eine Weide für seine Ziegen einzäunen möchte.
Er bittet dich um deine Hilfe und gibt dir dafür 100m Koppelzaun.

Überlege dir, auf welche Arten du die Weide einzäunen könntest.
Denke daran, dass immer der ganze Zaun verwendet werden soll!
Zeichne alle unterschiedlichen Weiden, die du einzäunen kannst, in den Plan unten ein.

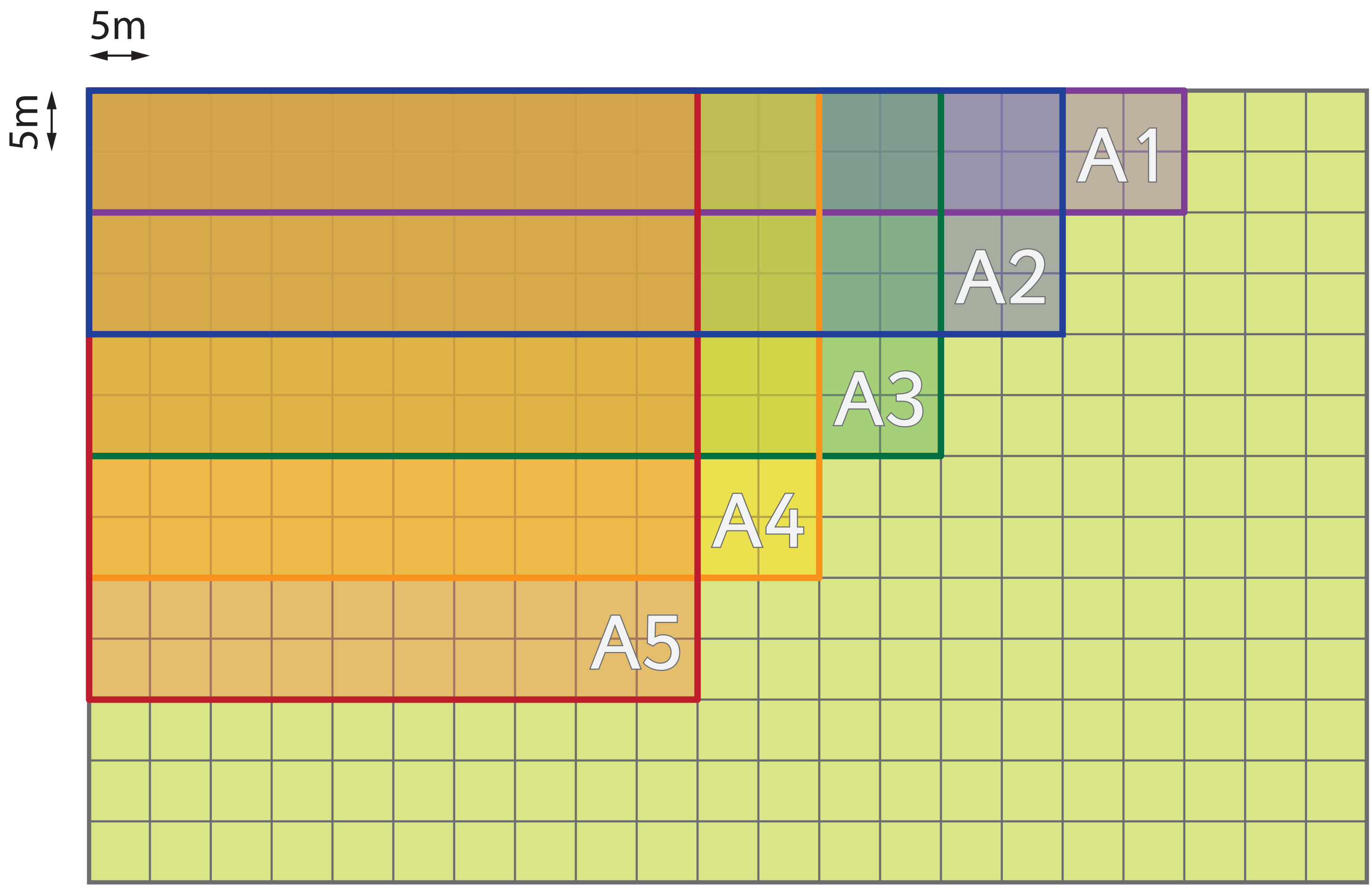


Eine Ziege benötigt mindestens $25m^2$ Platz (5m mal 5m). 

Überlege dir, wie viele Ziegen auf den unterschiedlich eingezäunten Weiden Platz haben.
Schreib auf, was dir auffällt.

G8 Immer 100 Meter

Lösungsmöglichkeiten, die Koppel als Rechteck abzustecken:

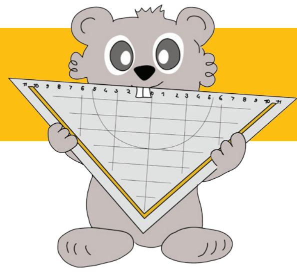


Flächen:
A1: Platz für 9 Ziegen
A2: Platz für 16 Ziegen
A3: Platz für 21 Ziegen
A4: Platz für 24 Ziegen
A5: Platz für 25 Ziegen

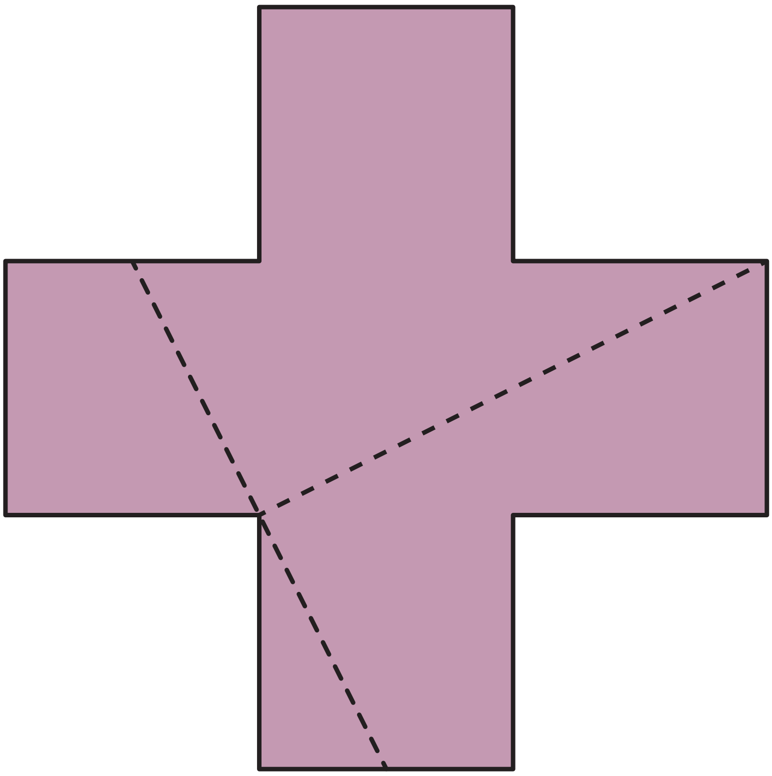
Die Schüler*innen können herausfinden, dass der Umfang immer gleichbleibt, die Fläche dagegen unterschiedlich groß ist.

Info für Lehrer*innen:
Je näher das Rechteck einem Quadrat rückt, desto größer wird sein Flächeninhalt. Das Quadrat hat unter den Rechtecken mit gleichbleibendem Umfang immer den größten Flächeninhalt.

G9 Das Qua-Kreuz



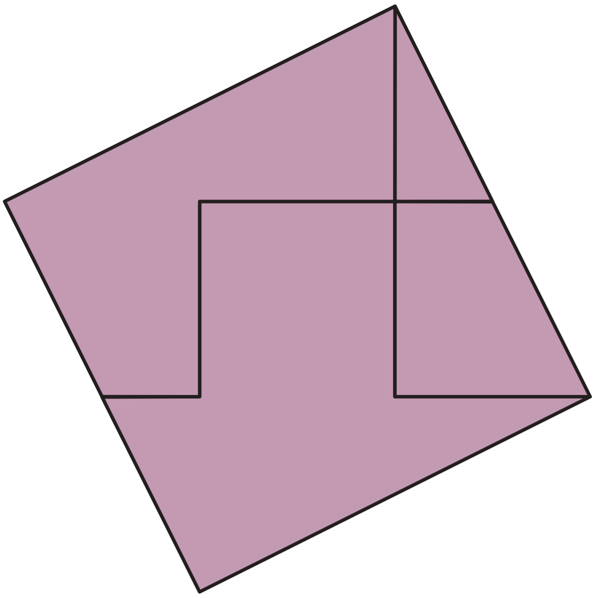
Du brauchst: ein Geodreieck, eine Schere

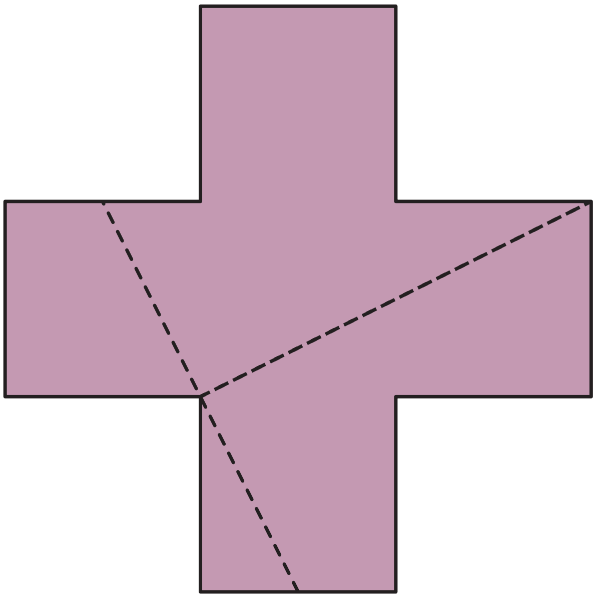


Zeichne mit dem Geodreieck ein Kreuz wie oben abgebildet. Die Linien zwischen den Eckpunkten sind jeweils 4cm lang. Wenn das Kreuz fertig ist, zeichnest du die beiden strichlierten Schnittlinien ein. Achte dabei auf die rechten Winkel.

1. Schneide das Kreuz aus. Schneide auch entlang der strichlierten Linien.
2. Mische die vier Teile und setze das Kreuz wieder zusammen.
3. Mische die Teile und setze sie nun zu einem Quadrat zusammen.
4. Zeichne eine Skizze deines Quadrats. Alle Linien sollen eingezeichnet werden.
5. Überlege, warum man aus den Teilen diese zwei Formen legen kann.

G9 Das Qua-Kreuz





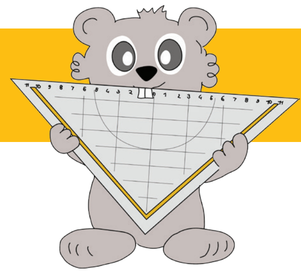
Eine wichtige Voraussetzung, um mit diesen Teilen zwei verschiedene Formen zu legen ist, dass die vier Teile nur Winkel haben, die „zueinander passen“:

Bereits im Kreuz sind 90°-Winkel vorhanden. Durch die Schnitte entstehen zwei neue 90°-Winkel, die dann zu zwei Ecken des Quadrats werden.

Auch die anderen beiden Winkelmaße, die beim Zerschneiden entstehen, passen zusammen:

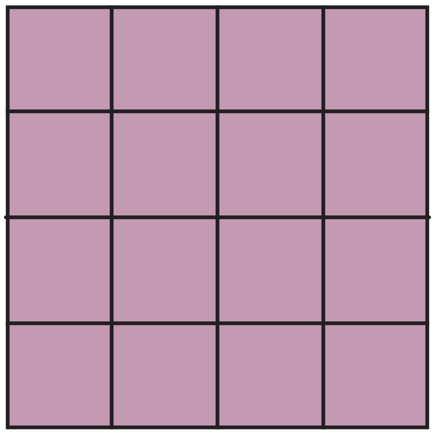
26,6° + 63,4° = 90°.

G10 Flächeninhalt



Du brauchst: eine Schere

Welche der beiden Formen ist größer? Begründe deine Entscheidung!



Überpüfe deine Vermutung, indem du die kleinen Quadrate im Quadrat ausschneidest und auf das Rechteck legst.

Kannst du noch andere Formen finden, die den gleichen Flächeninhalt haben wie das Quadrat? Schreibe auf, wie man vorgehen kann, um solche Formen zu finden.

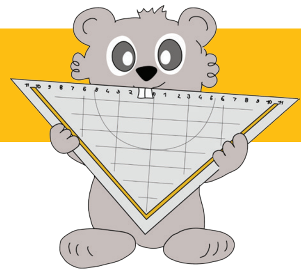
G10 Flächeninhalt

Die beiden Formen sind gleich groß. Wichtig hierbei ist, dass die Schüler*innen ihre Entscheidung in eigenen Worten begründen, egal, wie sie ausfällt.

Durch das Abdecken sollen die Schüler*innen erkennen, dass die beiden Formen den gleichen Flächeninhalt haben. Egal, welche Vermutung sie zuvor hatten:
Jetzt sollten sie erkennen, dass beide Formen flächengleich sind.

Durch Auflegen der ausgeschnittenen Quadrate können beliebig viele Formen entstehen. Wichtig ist, dass nicht nur Figuren mit geradliniger Begrenzung zulässig sind, sondern z.B. auch L-förmige Formen.
Die Teile müssen jeweils an zumindest einer Seite anliegen (nicht nur an Ecken), nicht überlappen und es müssen alle Teile verwendet werden.

G11 In einem Zug



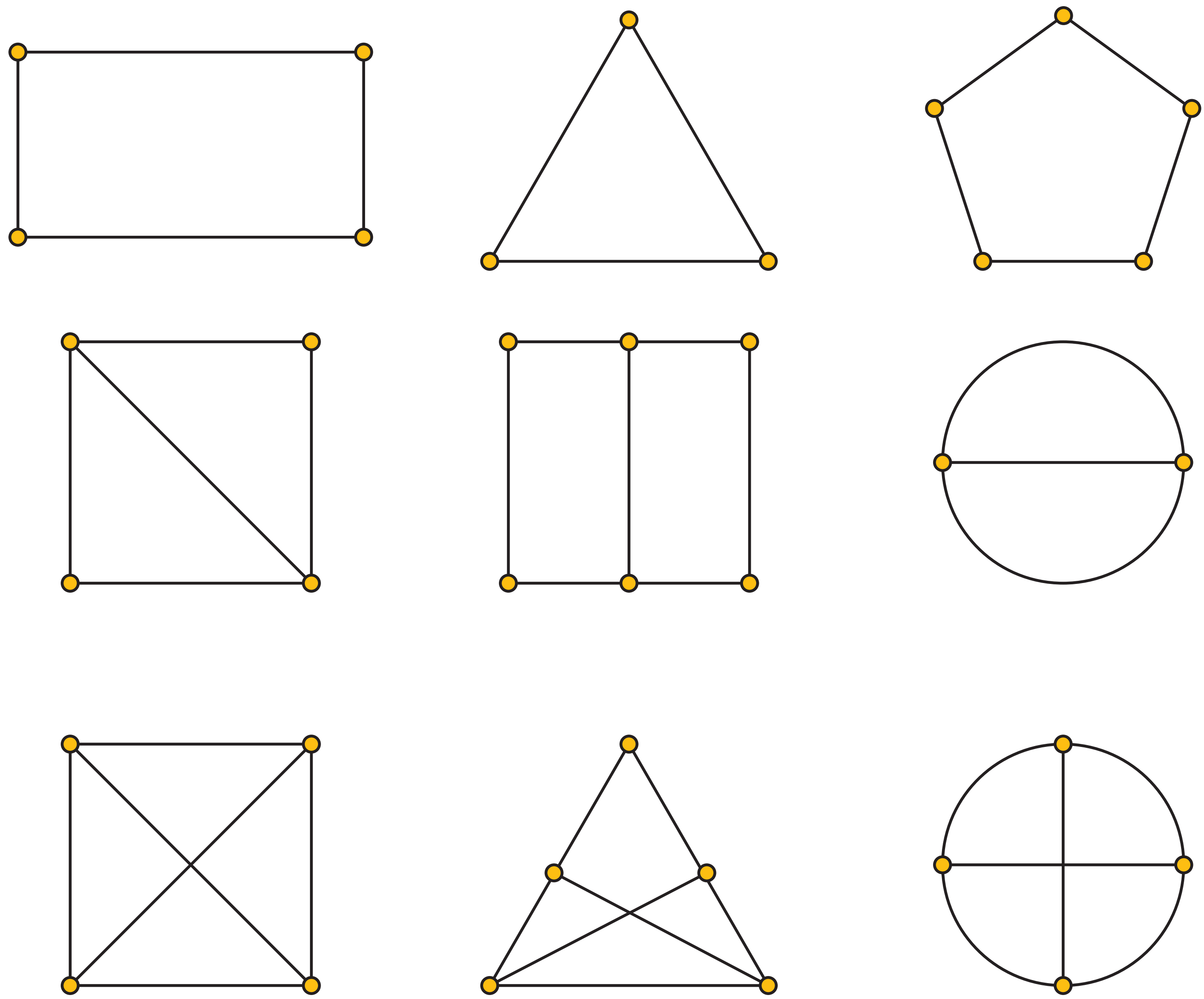
Welche Figuren kannst du in einem Zug zeichnen?

Beachte:

Du darfst beim Zeichnen den Stift nicht absetzen und an einer anderen Stelle neu anfangen.

Du darfst keine Linie doppelt zeichnen.

Du darfst aussuchen, an welchem Punkt du beginnst.



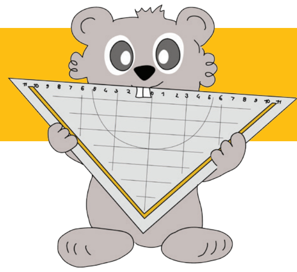
In einem Zug

Die Figuren in der ersten Zeile können in einem Zug, d.h. ohne eine Strecke doppelt zu zeichnen, gezeichnet werden und man kommt zum Ausgangspunkt zurück. Von jedem Eckpunkt gehen zwei Strecken aus.

Die Figuren in der zweiten Zeile können in einem Zug, d.h. ohne eine Strecke doppelt zu zeichnen, gezeichnet werden, aber man kommt nicht zum Ausgangspunkt zurück. Von zwei Punkten gehen drei Linien aus.

Die Figuren in der dritten Zeile können nicht in einem Zug, d.h. ohne eine Strecke doppelt zu zeichnen, gezeichnet werden. Von vier Punkten gehen drei Linien aus.

G12 Vierecke und Dreiecke



Du brauchst: ein A4 Blatt, eine Schere

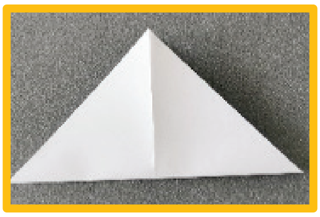
1. Nimm ein A4 Blatt in die Hand und schau es dir genau an. Welche Form hat es? Kreuze die richtige Antwort an:

   ☐ Es ist ein Dreieck. ☐ Es ist ein Rechteck.

2. Nimm nun die obere rechte Ecke des Blattes und falte das Papier diagonal so, dass die Ecke genau auf die linke Seitenkante trifft.
   Öffne nun das Papier. Was siehst du?

   ☐ Viereck, Dreieck ☐ Quadrat, Dreieck

3. Klappe die Ecke wieder hinunter und schneide das Rechteck ab. Öffne das Dreieck. Was siehst du? Schreibe auf, welche ebenen Figuren du entdecken kannst. Wie viele sind es?



4. Nimm das geöffnete Blatt und falte nochmals diagonal. Dein Dreieck sollte nun wie auf dem Bild aussehen.

   Lass das Dreieck geschlossen vor dir liegen.
   Überlege: Welche ebenen Figuren wirst du nach dem Öffnen entdecken können?

5. Öffne nun das Blatt. Welche ebenen Figuren siehst du? Wie viele sind es? Schreibe deine Antwort auf!

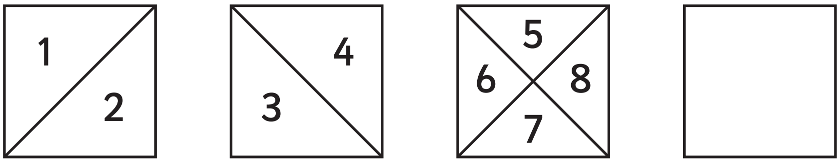
G12 Vierecke und Dreiecke

1. ☐ Es ist ein Dreieck. ☒ Es ist ein Rechteck.

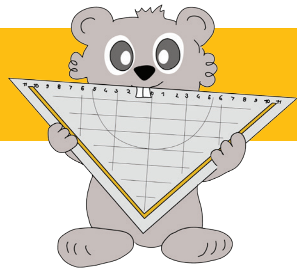
2. ☒ Viereck, Dreieck ☐ Quadrat, Dreieck

3. Es sind zwei Dreiecke und ein Quadrat zu sehen.
   Insgesamt sind es drei.

5. Es sind acht Dreiecke und ein Quadrat zu sehen.
   Insgesamt sind es neun ebene Figuren.

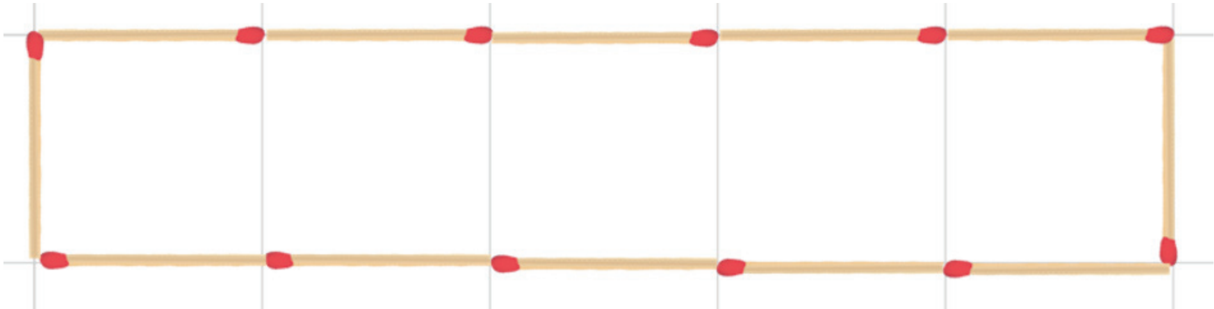


G13 Streichhölzer



Du brauchst: zwölf Streichhölzer, Vorlage mit Kästchen

Mit zwölf Streichhölzern kann man eine Figur legen,
die genau fünf Quadrate groß ist:



Lege weitere Figuren aus zwölf Streichhölzern, die genau fünf Quadrate groß sind!

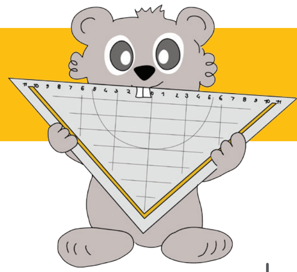
Finde so viele unterschiedliche Figuren wie möglich!

Skizziere deine gefundenen Figuren!

Ordne die Figuren! Beschreibe, wie du ordnest!

Versuche Figuren zu finden, die du mit genau zwölf Streichhölzern legen kannst, und die größer als fünf Quadrate sind! Fertige eine Skizze an!

Streichhölzer

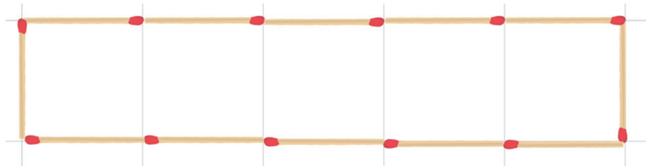


Vorlage: Kästchen zum Legen der Streichhölzer

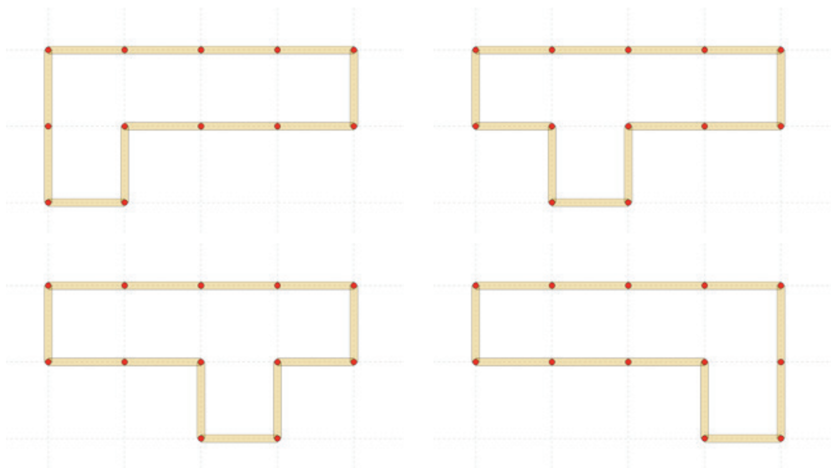
G13 Streichhölzer

Hilfestellung:
Die Streichhölzer auf die Vorlage zu legen unterstützt den Prozess des Überprüfens, ob der Flächeninhalt der gelegten Figur tatsächlich eine Größe von genau fünf Quadraten hat.

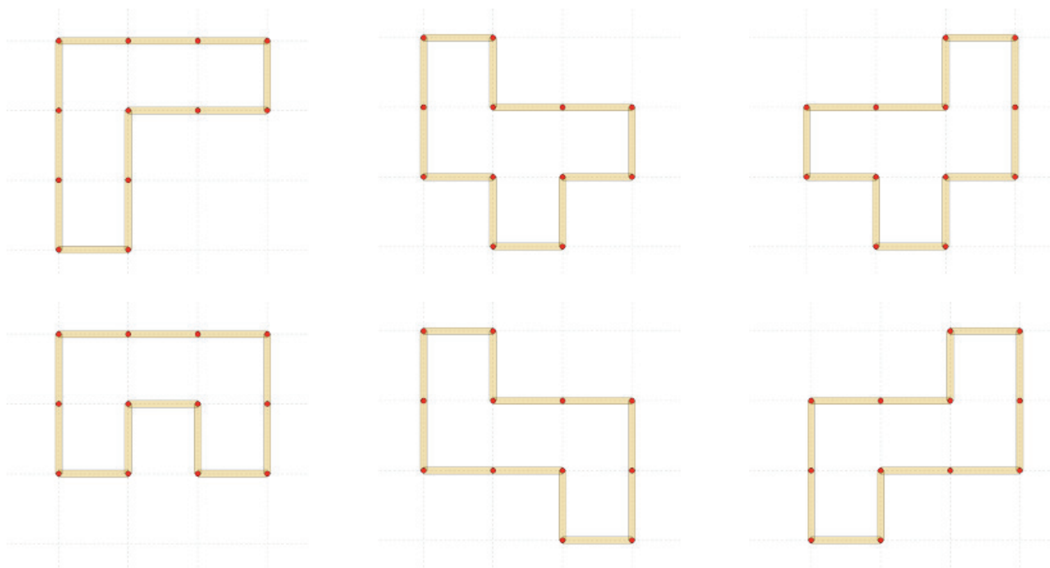
Fünf Kästchen in einer Reihe



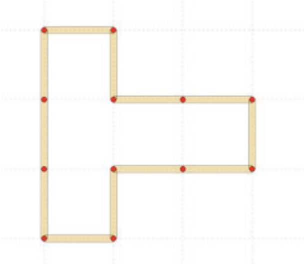
Vier Kästchen in einer Reihe

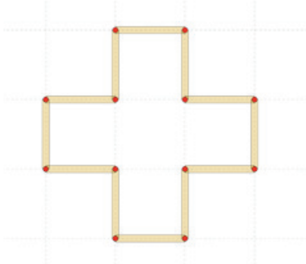


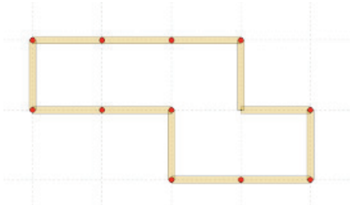
Drei Kästchen in einer Reihe

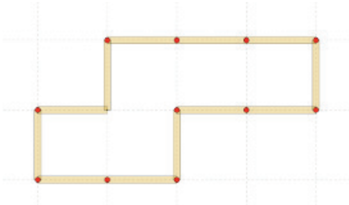


G13 Streichhölzer

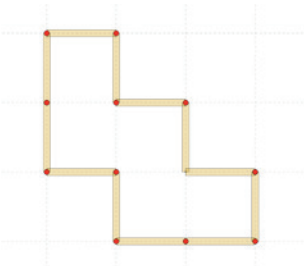




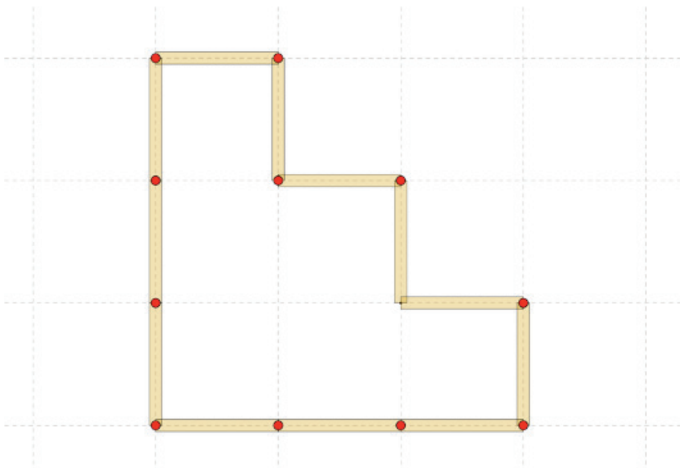




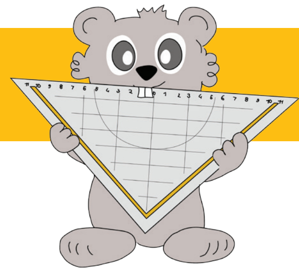
Zwei Kästchen in einer Reihe



Klar gibt es Figuren, die einen größeren Flächeninhalt haben, zum Beispiel:
Figur mit sechs Kästchen

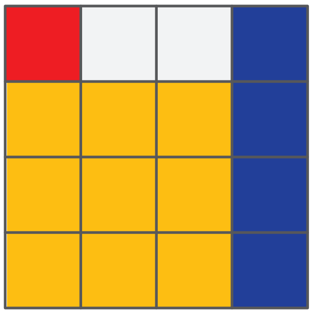


G14 Mondrian - Quadrate



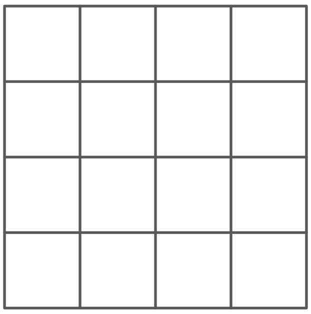
Du brauchst: Buntstifte, Vorlage mit quadratischen „Leinwänden“

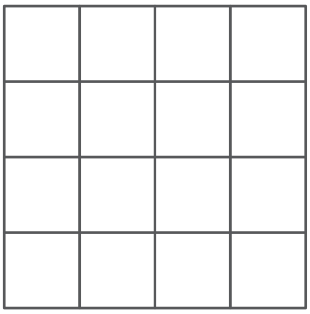
Piet Mondrian war ein Künstler, der in den Niederlanden lebte. Er hat viele Bilder gemalt, auf denen man bunte Quadrate, Rechtecke und schwarze Linien sieht.
So malst du ein Mondrian - Bild:

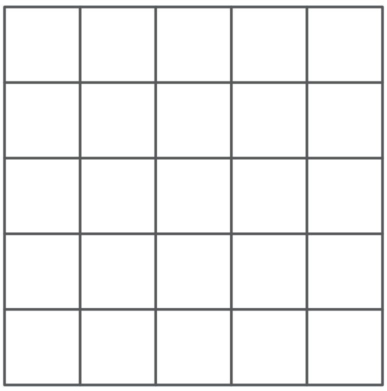


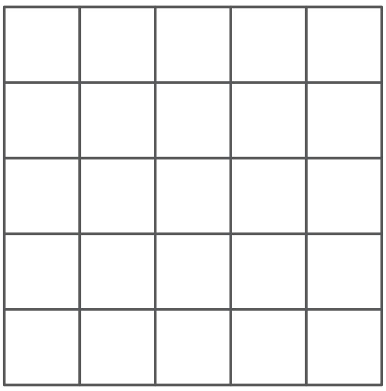
1. Teile die quadratische „Leinwand“ in **unterschiedliche** Rechtecke oder Quadrate auf. Die Figuren dürfen sich dabei **nicht** überschneiden.
2. Suche das größte und das kleinste Rechteck oder Quadrat und notiere ihre Flächeninhalte.
   Wie groß ist der Unterschied zwischen den beiden Flächen?

Male verschiedene Mondrian-Bilder mit Quadraten und Rechtecken und notiere dir immer den Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Flächeninhalt. Forsche mit größeren „Leinwänden“ weiter.



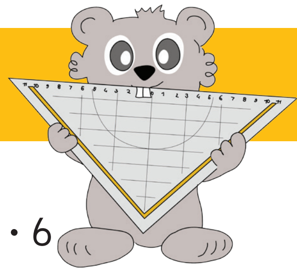




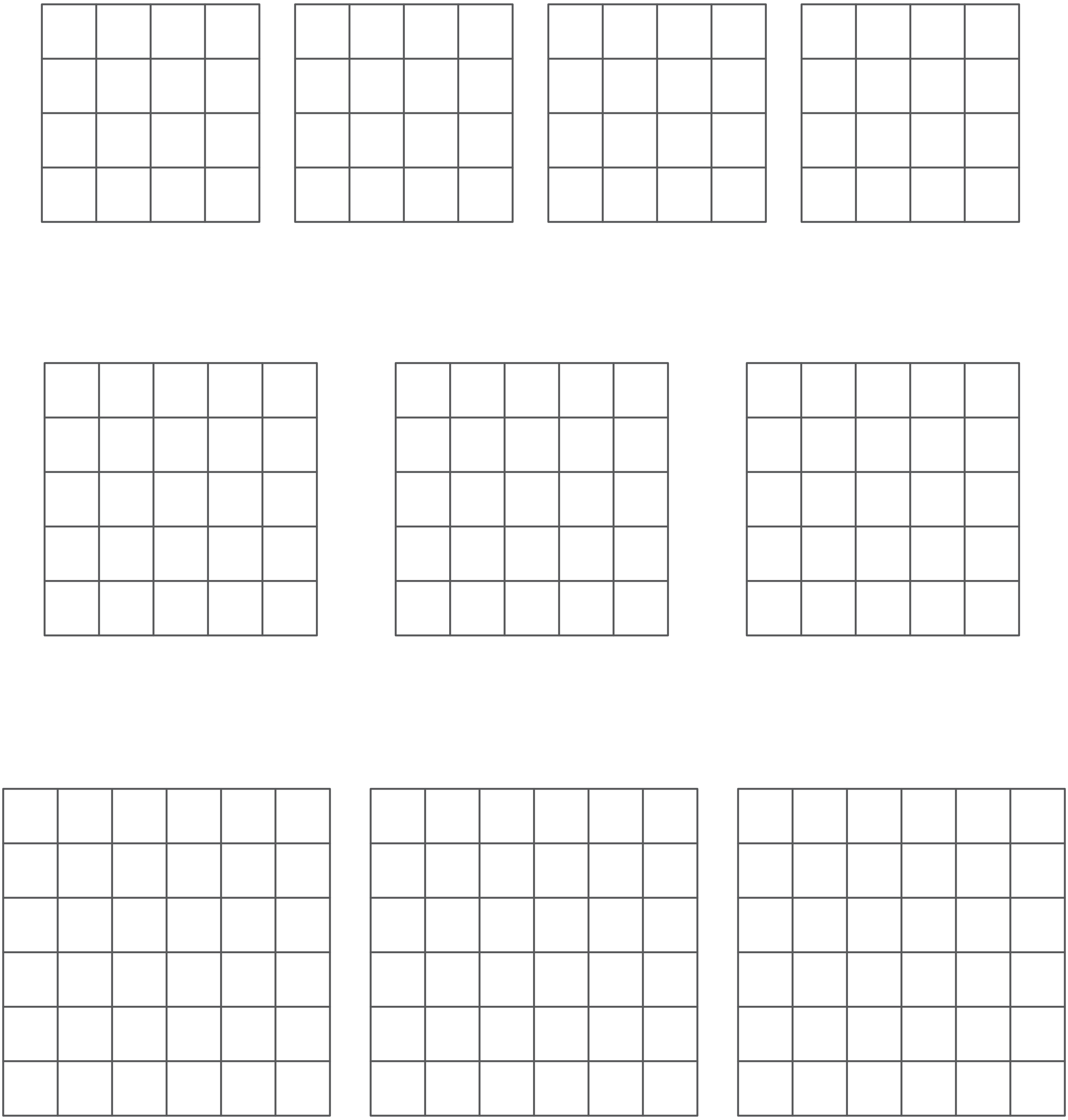


Findest du für jede Leinwandgröße ein Mondrian-Bild, in dem der Unterschied zwischen größtem und kleinstem Flächeninhalt so klein wie möglich ist?

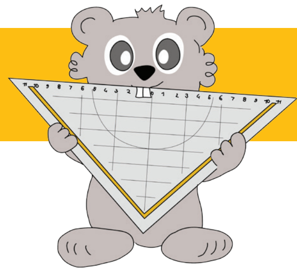
G14 Mondrian - Quadrate



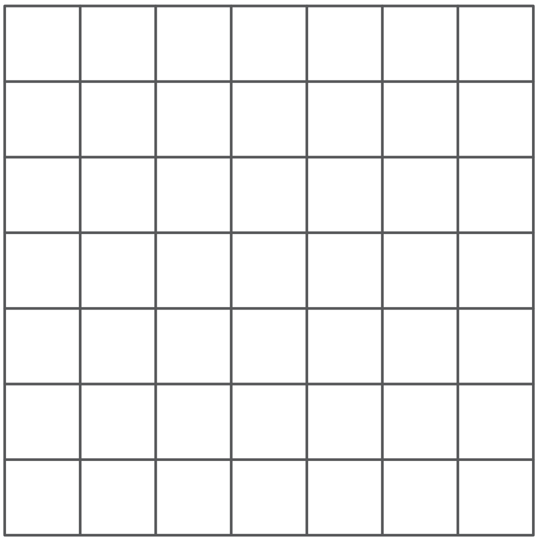
Vorlage 1: quadratische „Leinwände“ zum Forschen 4 • 4, 5 • 5 und 6 • 6

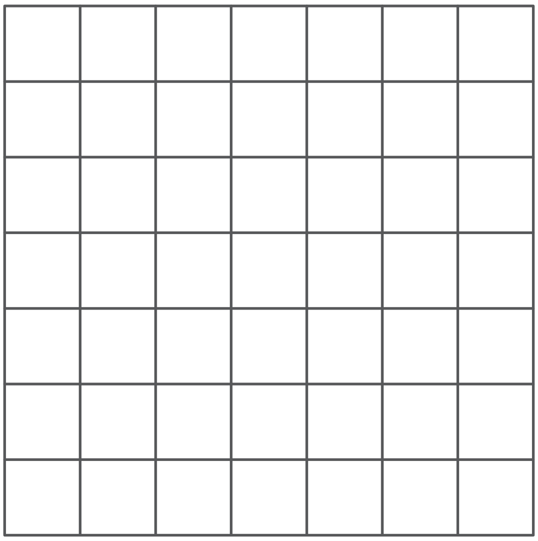


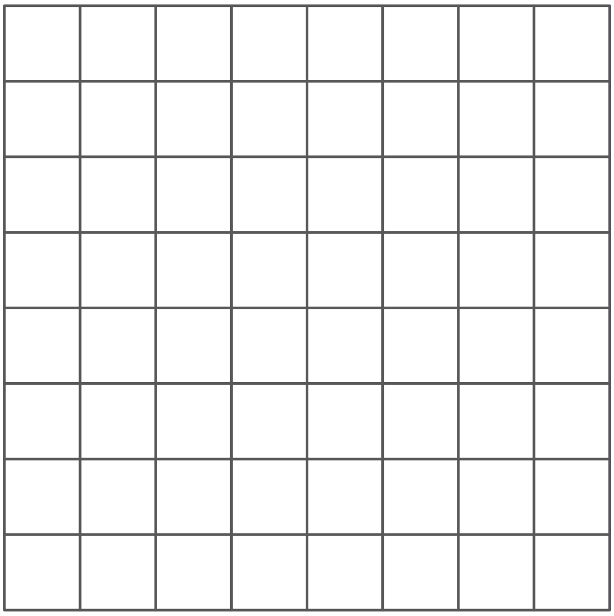
G14 Mondrian - Quadrate

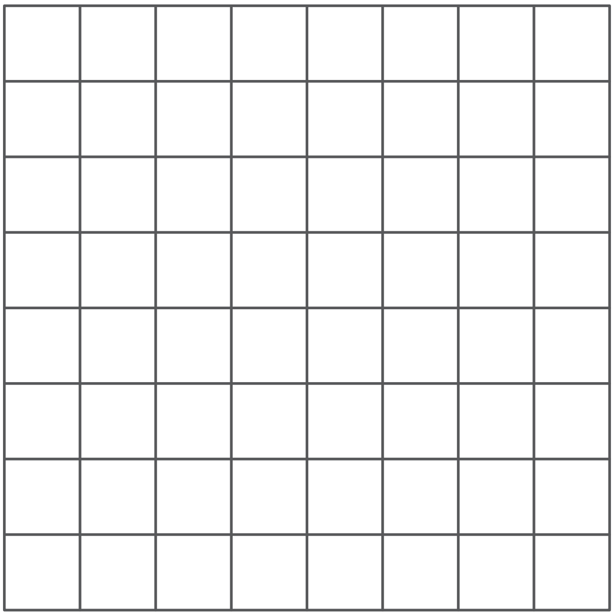


Vorlage 2: quadratische „Leinwände“ zum Forschen 7 • 7 und 8 • 8

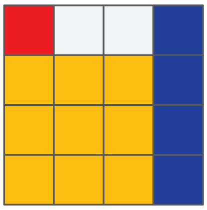




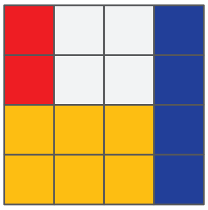




G14 Mondrian - Quadrate

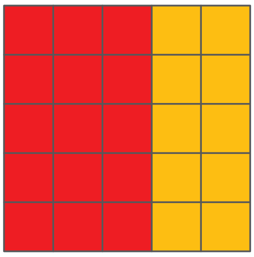


2. Der Unterschied ist 9 - 1 = 8.



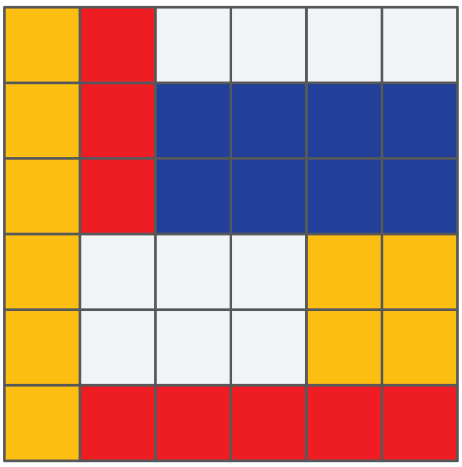
Bei einer 4 • 4 Leinwand ist der kleinstmögliche Unterschied zwischen größter und kleinster Fläche 4.

Bei einer 5 • 5 Leinwand ist der kleinstmögliche Unterschied zwischen größter und kleinster Fläche 5. Eine mögliche Lösung kann so aussehen:

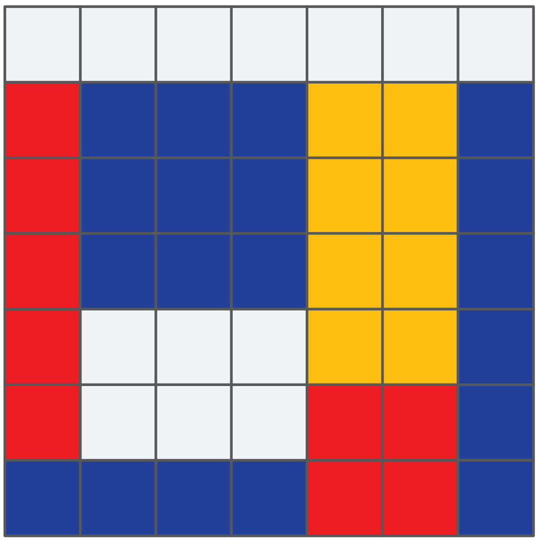


Jede ungerade Leinwand kann in zwei Rechtecke unterteilt werden, die sich in der Breite genau um eins unterscheiden. So findet man jedenfalls eine Lösung, allerdings nicht immer die beste (mit dem kleinsten Unterschied).

Bei einer 6 • 6 Leinwand ist der kleinstmögliche Unterschied zwischen größter und kleinster Fläche 5.
Eine mögliche Lösung kann so aussehen:

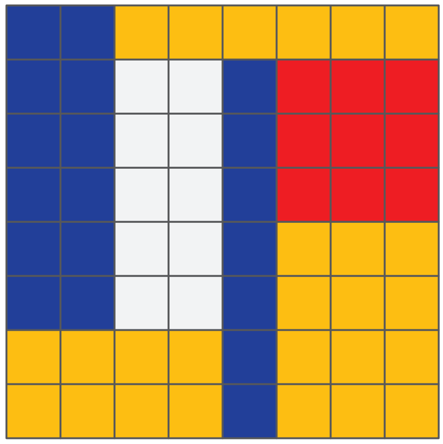


Bei einer 7 • 7 Leinwand ist er auch 5.
Eine mögliche Lösung kann so aussehen:



G14 Mondrian - Quadrate

Bei einer 8 • 8 Leinwand ist der kleinstmögliche Unterschied 6.
Hier eine mögliche Lösung:



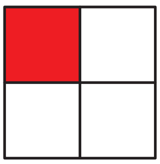
Möglichkeiten für Differenzierung und Erweiterung:

Es kann überlegt werden, wie das Rätsel mit 1 • 1 oder 2 • 2 Leinwänden funktionieren kann:

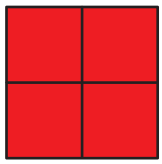
1 • 1 kann nicht mehr weiter unterteilt werden.

2 • 2 funktioniert auch nicht, wie die nachstehende Abbildung zeigt.

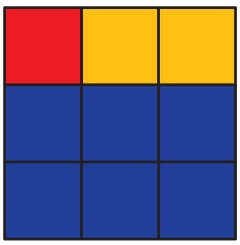
beide Rechtecke sind gleich



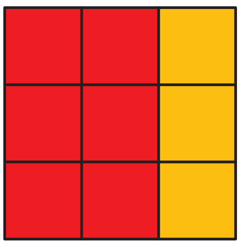
keine unterschiedliche Unterteilung möglich



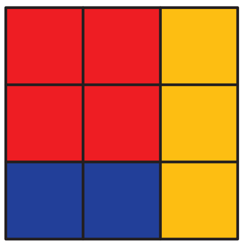
Auch mit 3 • 3 Quadraten kann in den Forschungsprozess eingestiegen werden:



Unterschied:
6 - 1 = 5



Unterschied:
6 - 3 = 3



Unterschied:
4 - 2 = 2

Die Schüler*innen können ermutigt werden, für eine vorgegebene Leinwandgröße möglichst viele unterschiedliche Lösungen zu suchen.

Außerdem kann beim Anmalen der Rechtecke und Quadrate die Aufgabe gestellt werden, dass nur vier Farben verwendet werden dürfen. Zwei gleiche Farben dürfen einander nicht berühren. Das ist tatsächlich immer möglich.

Dies ist eine Anwendung des sogenannten „Vier-Farben-Satzes“.